ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

В статье даются весьма точные оценки простейших тригонометрических сумм с простыми числами. Выводится довольно общая теорема, с значительной точностью характеризующая распределение остатков от деления простых чисел на данное достаточно большое число.

Моими последними работами[1] важнейшие оценки тригонометрических сумм с простыми числами, которые можно получить моим методом 1937—1938 гг., в основном исчерпаны. Однако в некоторых довольно важных частных случаях точность моих результатов может быть сильно улучшена. Рассмотрению одного из таких частных случаев и посвящена настоящая работа. Здесь я оцениваю суммы вида

$$\sum_{N-A<p\leqslant N} e^{2\pi i \frac{a}{q} p^n}, \ (a, q)=1. \quad (1)$$

Следует отметить, что для малых q $\Big($для $q<e^u$, $u=r^\delta$, где $r=\log N$ и δ — правильная дробь, немногим превосходящая $\frac{1}{2}$; при этом A есть величина порядка, близкого к $N\Big)$ весьма точные оценки сумм (1) являются непосредственным следствием известных теорем, относящихся к распределению простых чисел в арифметических прогрессиях (Siegel, Estermann и др.).

Мой метод дает близкие к предельным оценки сумм (1) при несравнимо более широких условиях; при этом наиболее трудным является применение моего метода как раз к указанному выше случаю малых q. Тем не менее, как показано мною ранее[2], соединение моего метода с известным методом V. Brun'а дает возможность с успехом рассматривать и случай малых q.

В конце работы для случая $n=1$ я рассматриваю сумму более общую, чем сумма (1). Отсюда я вывожу довольно общую теорему, с значительной точностью характеризующую распределение остатков

[1] Матем. сборн. 3 (45) : 3, (1938) и Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., (1938), № 4.

[2] ДАН, XXII, № 2 (1939).

от деления простых чисел на данное большое число (распределение простых чисел по данному модулю).

Обозначения. Символические неравенства

$$A \ll B \quad \text{или} \quad B \gg A$$

показывают, что отношение

$$\frac{|A|}{|B|}$$

не превосходит некоторого постоянного.

Буквою p обозначаем простое число.

Буквою θ обозначаем число с условием $|\theta| \leqslant 1$.

Вводим следующие символы:

$$\{x\} = x - [x], \ (x) = \min(\{x\}, 1 - \{x\}).$$

ЛЕММА 1. (V. Brun.) *Пусть* ε, c_0, c *любые положительные постоянные* < 1 *и* ρ *произвольно малое положительное постоянное. Пусть, далее,* $N > 2$, $r = \log N$,

$$0 < q \leqslant e^{r^c}, \ 0 < q_1 < e^{r^c}, \ (q_1, q_2) = 1; \ 0 \leqslant l < q, \ (q, l) = 1,$$
$$N e^{-r^{c_0}} \ll A \ll N, \quad p_0 = e^{r^{1-\varepsilon}},$$

наконец, D *обозначает произведение всех простых* $\leqslant p_0$, *не делящих* $q q_1$.

Тогда число T *чисел* $\equiv l \pmod q$ *и взаимно простых с* D, *заключенных в интервале*

$$N - A < qx + l \leqslant N,$$

удовлетворяет неравенству

$$T \ll \frac{A (q q_1)^\rho}{r^{1-\varepsilon} q}.$$

Доказательство[3]. Достаточно считать $N > C$, где C — достаточно большое постоянное > 2. Пусть σ обозначает число простых делителей числа D; $p_1, \ldots, p_\sigma$ эти простые делители,

$$m = 2[3 \log r - 1],$$

$\Omega(d)$ обозначает число различных простых делителей числа d. Имеем

$$T < \sum_{\substack{d/D \\ \Omega(d) < m}} \mu(d) \left(\frac{A}{qd} + \theta_d\right).$$

Отсюда находим

$$T < \sum_{\substack{d/D \\ \Omega(d) < m}} \mu(d) \frac{A}{qd} + \sum_{h=0}^{m-1} \binom{\sigma}{h}.$$

Но здесь имеем

$$\sum_{d/D} \mu(d) \frac{A}{qd} = \frac{A}{q} \frac{\prod\limits_{p \leqslant p_0} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p / q q_1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \ll \frac{A (q q_1)^\rho}{r^{1-\varepsilon} q}.$$

---

[3] V. Brun, Videnskapsselskapets Skrifter I. Mat.-naturv. Klasse, № 3, Kristiania.

E. C. Titchmarsh, Rend. del circ. mat. di Palermo, t. LIV, (1930), 414—439.

E. Landau, Vorl. über Zahlentheorie, 1927, Bd. I, II. Teil, Kap. 2.

Далее находим

$$\left| \sum_{\substack{d/D \\ m \leqslant \nu(d) \leqslant \sigma}} \mu(d) \frac{A}{qd} \right| < \frac{A}{q} \sum_{\substack{d/D \\ m \leqslant \nu(d) \leqslant \sigma}} \frac{1}{d} < \frac{A}{q} \sum_{n=m}^{\sigma} S_n,$$

где S_n обозначает n-ую элементарную симметрическую функцию от

$$\frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_\sigma}.$$

При этом легко видеть, что

$$\frac{A}{q} \sum_{n=m}^{\sigma} S_n < \frac{A}{q} \sum_{n=m}^{\sigma} \frac{S_1^n}{n!} < \frac{A}{q} \sum_{n=m}^{\sigma} \left(\frac{eS_1}{n}\right)^n \ll$$

$$\ll \frac{A}{q} \sum_{n=m}^{\sigma} \left(\frac{4 \log r}{m}\right)^n \ll \frac{A}{q} \left(\frac{4}{5}\right)^{6 \log r} \ll \frac{A}{rq}.$$

Наконец

$$\sum_{h=0}^{m-1} \binom{\sigma}{h} < \sum_{h=0}^{m-1} \sigma^h < p_0^m < \frac{A}{rq} \frac{rq}{A} e^{6r^{1-\varepsilon} \log r} < \frac{A}{rq},$$

что и доказывает нашу лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть η произвольно малое положительное постоянное, n целое положительное постоянное, q целое > 0 и x пробегает приведенную систему вычетов по модулю q.*

Тогда, каково бы ни было целое a, число решений сравнения

$$x^n \equiv a \pmod q$$

будет

$$\ll q^\eta.$$

Доказательство. Пусть

$$q = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

каноническое разложение числа q. Сравнение

$$x^n \equiv a \pmod q$$

равносильно системе сравнений

$$x^n \equiv a \pmod{p_1^{\alpha_1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x^n \equiv a \pmod{p_k^{\alpha_k}}.$$

Каждое из этих сравнений имеет $\leqslant n$ решений, кроме, быть может, одного, которое может иметь $\leqslant 2n$ решений (случай $p_1 = 2$). Отсюда и из

$$n^k \ll q^\eta$$

лемма следует непосредственно.

ЛЕММА 3. *Пусть ρ произвольно малое положительное постоянное, n целое положительное постоянное,*

$$(a, q) = 1, \quad q > 1;$$

далее $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ обозначают функции, принимающие неотрицательные значения для рассматриваемых значений x и y, причем

$$\sum_{\substack{0 \leqslant x < q \\ (x, q) = 1}} (\varphi(x))^2 \leqslant X, \quad \sum_{\substack{0 \leqslant y < q \\ (y, q) = 1}} (\psi(y))^2 \leqslant Y.$$

Тогда для суммы

$$S = \sum_{\substack{0 \leqslant x < q \\ (x, q)=1}} \sum_{\substack{0 \leqslant y < q \\ (y, q)=1}} \varphi(x) \varphi(y) e^{2\pi i \frac{a}{q} x^n y^n}$$

имеем неравенство

$$S^2 \ll XYq^{1+\rho}.$$

Доказательство. Имеем

$$S^2 \ll X \sum_x \sum_y \sum_{y_1} \psi(y) \psi(y_1) e^{2\pi i \frac{a}{q} x^n (y^n - y_1^n)} \ll$$

$$\ll X q^{\frac{\rho}{3}} \sum_{u=0}^{q-1} \sum_y \sum_{y_1} \psi(y) \psi(y_1) e^{2\pi i \frac{a}{q} u (y^n - y_1^n)}.$$

Суммируя сначала по u, получим q или же нуль, в зависимости от того, будет ли $y^n \equiv y_1^n \pmod q$ или нет. Отсюда лемма следует непосредственно.

ЛЕММА 4. *Пусть ρ произвольно малое положительное постоянное, n целое положительное постоянное,*

$$(a, q) = 1, \quad q > 1$$

и z пробегает приведенную систему вычетов по модулю q.

Тогда для суммы

$$T = \sum_z e^{2\pi i \frac{a}{q} z^n}$$

имеем неравенство

$$T \ll q^{\frac{1}{2}+\rho}.$$

Доказательство. Очевидно

$$T = \frac{1}{\Phi(q)} S, \quad S = \sum_{\substack{0 \leqslant x < q \\ (x, q)=1}} \sum_{\substack{0 \leqslant y < q \\ (y, q)=1}} e^{2\pi i \frac{a}{q} x^n y^n},$$

где $\Phi(q)$ — функция Эйлера. Согласно лемме 3 имеем

$$S \ll q^{\frac{3}{2}+\frac{\rho}{2}},$$

откуда, ввиду

$$\Phi(q) \gg q^{1-\frac{\rho}{2}},$$

лемма 4 следует непосредственно.

Замечание. Та же оценка будет, очевидно, иметь место и для более общей суммы

$$T_1 = \sum_{0 \leqslant z < q} \chi(z) e^{2\pi i \frac{a}{q} z^n},$$

где χ — какой-либо характер по модулю q. Действительно

$$T_1 = \frac{1}{\Phi(q)} S_1, \quad S_1 = \sum_{0 \leqslant x < q} \sum_{0 \leqslant y < q} \chi(x) \chi(y) e^{2\pi i \frac{a}{q} x^n y^n}$$

Сумма же S_1 оценивается аналогично тому, как и сумма S в лемме 3. Следовательно, всегда имеем

$$T_1 \ll q^{\frac{1}{2}+\rho}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* ε *положительное постоянное* $\leqslant \frac{1}{3}$, η *произвольно малое положительное постоянное* $< \varepsilon$, $N > 2$, $r = \log N$,

$$Ne^{-r^{1-2\varepsilon}} \ll A \leqslant N,$$

$$(a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant e^{r^\varepsilon},$$

n целое положительное постоянное,

$$S = \sum_{N-A<p\leqslant N} e^{2\pi i \frac{a}{q} p^n}.$$

Тогда имеем

$$S \ll \frac{A}{r^{1-3\varepsilon} q^{\frac{1}{2}-\eta}}.$$

Доказательство. 1° Достаточно предполагать $N \geqslant N_0$, где N_0 — достаточно большое постоянное > 2. Пусть

$$\eta = 3\rho, \quad p_0 = e^{r^{1-\varepsilon}}$$

и D обозначает произведение всех простых чисел $\leqslant p_0$, не делящих q. Пусть далее d пробегает все делители числа D, а P пробегает числа, взаимно простые с Dq. Тогда имеем

$$\sum_{N-A<P\leqslant N} e^{2\pi i \frac{a}{q} P^n} = \sum_d \mu(d) S_d, \quad S_d = \sum_{\substack{\frac{N-A}{d} < m \leqslant \frac{N}{d} \\ (m, q)=1}} e^{2\pi i \frac{a}{q} d^n m^n} \tag{1}$$

2° В левой части отбрасываем все члены, где P делится на квадрат целого > 1. Ошибка, которая произойдет от такого отбрасывания, будет

$$\ll \sum_{p_0<P\leqslant\sqrt{N}} \left(\frac{A}{P^2}+1\right) \ll \frac{A}{p_0} + \sqrt{N} \ll \frac{A}{r\sqrt{q}}.$$

3° Теперь оценим ошибку Δ, которая получится, если в правой части равенства (1) отбросим члены, отвечающие значениям

$$d > N^{\frac{3}{4}}.$$

Пусть такое d имеет k простых делителей. Находим

$$p_0^k \geqslant N^{\frac{3}{4}}, \quad k \geqslant \frac{3}{4} r^\varepsilon.$$

Но имеем

$$\Delta \leqslant \sum_{N^{\frac{3}{4}}<d\leqslant N} \sum_{\frac{N-A}{d}<m\leqslant\frac{N}{d}} 1 \leqslant \sum_{0<m\leqslant N^{\frac{1}{4}}} \sum_{\frac{N-A}{m}<d\leqslant\frac{N}{m}} 1.$$

Далее из известной формулы следует

$$\tau\left[\frac{N-A}{m}+1\right] + \ldots + \tau\left[\frac{N}{m}\right] \ll \frac{A}{m} r.$$

Поэтому

$$2^{\frac{3}{4} r^\varepsilon} \sum_{\frac{N-A}{m}<d\leqslant\frac{N}{m}} 1 \ll \frac{A}{m} r, \qquad \sum_{\frac{N-A}{m}<d\leqslant\frac{N}{m}} 1 \ll \frac{A}{m} r \cdot 2^{-\frac{3}{4} r^\varepsilon};$$

$$\Delta \ll Ar^2 \cdot 2^{-\frac{3}{4} r^\varepsilon} \ll \frac{A}{r\sqrt{q}}.$$

4° Ввиду 2° и 3° равенство (1) принимает вид

$$\left.\begin{array}{c}\sum\limits_{N-A<Q\leqslant N} e^{2\pi i\frac{a}{q}Q^n}=\sum\limits_{0<d\leqslant N^{\frac{3}{4}}}\mu(d)\,S_d+O\left(\frac{A}{r\sqrt{q}}\right),\\ S_d=\sum\limits_{\substack{\frac{N-A}{d}<m\leqslant\frac{N}{d}\\(m,\,q)=1}} e^{2\pi i\frac{a}{q}d^nm^n}.\end{array}\right\}\qquad(2)$$

Здесь, в левой части, Q пробегает лишь числа, не делящиеся на квадрат целого >1 и взаимно простые с Dq.

5° Теперь оценим одну из сумм S_d, входящих в равенство (2). Имеем

$$S_d=\left[\frac{A}{qd}\right]T+O(q),$$

где T не зависит от d и, согласно лемме 4,

$$T\ll q^{\frac{1}{2}+\rho}.$$

Поэтому

$$\sum_{0<d\leqslant N^{\frac{3}{4}}}\mu(d)\,S_d=T\sum_{0<d\leqslant N^{\frac{3}{4}}}\mu(d)\left[\frac{A}{qd}\right]+O(N^{\frac{3}{4}}q).$$

Но рассуждая, как и в 3°, выводим

$$T\left|\sum_{N^{\frac{3}{4}}<d\leqslant\frac{A}{q}}\mu(d)\left[\frac{A}{qd}\right]\right|<\sum_{N^{\frac{3}{4}}<d\leqslant\frac{A}{q}}\;\sum_{0<m\leqslant\frac{A}{qd}}1\ll\frac{A}{r\sqrt{q}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{0<d\leqslant N^{\frac{3}{4}}}\mu(d)\,S_d\ll q^{\frac{1}{2}+\rho}Z+O\left(\frac{A}{r\sqrt{q}}\right),\quad Z=\sum_{0<d<\frac{A}{q}}\mu(d)\left[\frac{A}{qd}\right].$$

Очевидно Z выражает собою число чисел, взаимно простых с D, не превосходящих $\frac{A}{q}$. Поэтому, согласно лемме 1 (1 вместо q, q вместо q_1, $\frac{A}{q}$ вместо N и также вместо A, $\log\frac{A}{q}$ вместо r),

$$Z\ll\frac{Aq^{\rho}}{qr^{1-\varepsilon}}.$$

Поэтому равенство (2) может быть переписано в форме

$$\sum_{N-A<Q\leqslant N} e^{2\pi i\frac{a}{q}Q^n}\ll\frac{A}{r^{1-\varepsilon}q^{\frac{1}{2}-2\rho}}.\qquad(3)$$

6° Рассмотрим левую часть неравенства (3). Пусть k число простых делителей какого-либо Q. Имеем

$$p_0^k\leqslant N,\quad k\leqslant r^{\varepsilon}.$$

Следовательно, неравенство (3) может быть представлено в форме

$$\sum_{k=1}^{r^{\varepsilon}}\Omega_k\ll\frac{A}{r^{1-\varepsilon}q^{\frac{1}{2}-2\rho}},\qquad(4)$$

где Ω_k есть сумма слагаемых левой части (3), отвечающих значениям Q, имеющим ровно k простых делителей.

7° Оценим какое-либо значение Ω_k, предполагая $k > 1$. Сначала оценим сумму

$$T_k = \sum_u \sum_v e^{2\pi i \frac{a}{q} u^n v^n},$$

где u пробегает простые числа с условием

$$p_0 < u \leqslant \sqrt{N}$$

и v, при данном u, пробегает числа Q интервала

$$\frac{N-A}{u} < v \leqslant \frac{N}{u},$$

не делящиеся на квадрат целого > 1 и имеющие ровно $k-1$ простых сомножителей $> p_0$ и $\leqslant \sqrt{N}$.

Здесь весь интервал

$$p_0 < u \leqslant \sqrt{N}$$

мы подразделим на $\ll r$ интервалов вида

$$U < u \leqslant U_0, \quad 2U \leqslant U_0 \leqslant 4U$$

и далее, полагая

$$H_0 = e^{(\log U)^{1-\varepsilon}},$$

мы каждый из новых интервалов подразделим на $\ll H_0$ более мелких интервалов вида

$$u_0 < u \leqslant u', \quad UH_0^{-1} < u' - u_0 \leqslant 2UH_0^{-1}.$$

Пусть

$$W = \sum_{u_0 < u \leqslant u'} \sum_{\frac{N-A}{u} < v \leqslant \frac{N}{u}} e^{2\pi i \frac{a}{q} u^n v^n}.$$

Имеем

$$\frac{N-A}{u} = \frac{N-A}{u_0} + O\left(\frac{N}{U} H_0^{-1}\right), \quad \frac{N}{u} = \frac{N}{u_0} + O\left(\frac{N}{U} H_0^{-1}\right).$$

Поэтому сумма W будет отличаться от суммы

$$W_1 = \sum_{u_0 < u \leqslant u'} \sum_{\frac{N-A}{u_0} < v \leqslant \frac{N}{u_0}} e^{2\pi i \frac{a}{q} u^n v^n}$$

на величину порядка

$$\frac{N}{U} H_0^{-1} U H_0^{-1} = N H_0^{-2}.$$

Сумма всех таких ошибок для всех W, на которые разбивается T_k, будет

$$\ll N \sum_U H_0^{-1} \ll A e^{r^{1-2\varepsilon} - r^{(1-\varepsilon)^2}} r \ll \frac{A}{rq}.$$

8° Пусть l какое-либо из чисел $0, \ldots, q-1$ с условием $(l, q) = 1$. Применяя лемму 1, оценим число B чисел u формы $qx + l$, заключенных в интервале

$$u_0 < u \leqslant u'.$$

Здесь полагаем $q_1 = 1$. Вместо N следует теперь взять число u'. Следовательно, вместо r надо брать $\log u'$. За ε можно принять то же самое

число ε, что и в доказываемой теореме. За A следует взять $u'-u_0$, что

$$\gg u' e^{-(\log u')^{1-\varepsilon}}.$$

Тогда условия леммы будут соблюдены и мы будем иметь

$$B \ll \frac{u'-u_0}{r^{(1-\varepsilon)^2} q^{1-\rho}} \ll M, \quad M = \frac{UH_0^{-1}}{r^{(1-\varepsilon)^2} q^{1-\rho}}.$$

9° Далее, применяя лемму 1, оценим также число B_1 чисел $v \equiv l \pmod q$, взаимно простых с D и лежащих в интервале

$$\frac{N-A}{u_0} < v \leqslant \frac{N}{u_0}.$$

Здесь вместо N леммы 1 следует взять $\frac{N}{u_0}$; вместо r следует взять $\log\frac{N}{u_0}$; наконец, вместо A следует взять $\frac{A}{u_0}$. Очевидно,

$$\frac{1}{2} r \leqslant \log \frac{N}{u_0} \leqslant r - r^{1-\varepsilon}.$$

Поэтому здесь получим

$$B_1 \ll M_1, \quad M_1 = \frac{A}{Ur^{1-\varepsilon} q^{1-\rho}}.$$

10° Теперь W_1 может быть представлено в форме

$$W_1 = \sum_{l} \sum_{l_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} l^n l_1^n},$$

где l и l_1 независимо друг от друга пробегают значения, выбранные среди взаимно простых с q чисел ряда

$$0, \ldots, q-1,$$

причем каждое свое значение l принимает $\ll M$ раз, а l_1 принимает $\ll M_1$ раз. Поэтому, согласно лемме 3, имеем

$$W_1 \ll MM_1 q^{\frac{3}{2}+\rho} \ll \frac{AH_0^{-1}}{r^{2-3\varepsilon-\varepsilon^2} q^{\frac{1}{2}-3\rho}}.$$

Вместе с тем из 7° находим

$$T_k \ll \frac{A}{r^{1-3\varepsilon+\varepsilon^2} q^{\frac{1}{2}-3\rho}}.$$

11° Очевидно, всякое слагаемое

$$e^{2\pi i \frac{a}{q} Q^n}$$

суммы Ω_k входит и в сумму T_k, причем ровно k раз. Кроме того, сумма T_k может содержать еще члены вида

$$e^{2\pi i \frac{a}{q} u^{2n} v_1^n}.$$

Но число таких членов будет

$$\ll \sum_{p_0 < u \leqslant \sqrt{N}} \left(\frac{A}{u^2}+1\right) \ll \frac{A}{p_0}.$$

Поэтому при $k > 1$

$$\Omega_k = \frac{1}{k} T_k + O\left(\frac{1}{k}\,\frac{A}{p_0}\right) \ll \frac{A}{kr^{1-3\varepsilon+\varepsilon^2} q^{\frac{1}{2}-3\rho}}.$$

Отсюда и из (4) теорема следует непосредственно.

Замечание. Разыскание асимптотических формул в аддитивных проблемах с простыми числами (я имею в виду видоизменение метода Hardy-Littlewood'а, применяемое в моих работах, причем речь идет о тех проблемах, которые уже исследованы) сводится к решению двух вопросов: 1) оценка интеграла на больших дугах (малые q), 2) оценка интеграла на малых дугах (большие q).

Методы решения первого вопроса, основанные на теории L-рядов и одинаково пригодные как для смешанных проблем (аргументы не всех слагаемых должны быть простыми числами), так и для чистых проблем (аргументы всех слагаемых простые числа), были полностью разработаны непосредственно перед появлением моих оценок тригонометрических сумм с простыми числами (метод, основанный на лемме Siegel'я, а также метод Estermann'а, дающий гораздо более слабый порядок остаточного члена, но независимый от леммы Siegel'я. Оба метода базируются на некоторых результатах Titchmarsh'а и Page'а).

Второй вопрос для смешанных проблем не требует моих оценок. В решении же всех без исключения чистых проблем мои оценки необходимы.

Здесь следует отметить, что мой метод может в значительной мере заменить теорию L-рядов и в решении первого вопроса. Например, пользуясь теоремой 1, мою асимптотическую формулу для числа представлений целого N в форме

$$N = x_1^n + \ldots + x_s^n, \quad n > 1, \; s \geqslant s_0$$

легко получить, имея доказанной обычную формулу для $\pi(x;\, q, l)$ лишь при $q < r^{\varepsilon}$ $(r = \log N)$, где ε — произвольно малое положительное постоянное. Если же пользоваться теоремой 1 и только результатами Page'а, то во всех проблемах остаточные члены получаются почти такие же точные, как и получаемые по методу Estermann'а. Так, в упомянутой моей формуле получается остаточный член порядка

$$N^{s\nu - 1} r^{-2s+2+\varepsilon}, \quad \nu = \frac{1}{n},$$

т. е. такой же, какой получается и при правильном использовании метода Estermann'а.

ЛЕММА 5. *Пусть N целое $> N_0$, где N_0 — достаточно большое постоянное > 1, $r = \log N$, D обозначает произведение всех простых $\leqslant \sqrt{N}$, h — положительное постоянное $\leqslant \frac{1}{6}$, $\lambda = 1 + h$.*

Тогда все делители $d \leqslant N$ числа D можно разбить на

$$< r^{\frac{\log r}{\log \lambda}}$$

классов с условием, что для каждого из этих классов существует целое положительное τ и 3τ чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau$; $G_1, \ldots, G_\tau$; $l_1, \ldots, l_\tau$ со следующими свойствами:

$$G_1 \geqslant G_2 \geqslant \ldots \geqslant G_\tau; \quad \gamma_s^{\lambda} = G_s; \quad l_s \geqslant 0;$$

всякое d, принадлежащее выбранному классу, представляется в виде произведения

$$d = g_1 \ldots g_\tau,$$

где g_s есть произведение ровно l_s простых чисел p с условием

$$\gamma_s \leqslant p^{l_s} < G_s,$$

так что

$$\gamma_s \leqslant g_s < G_s.$$

Доказательство. 1° Все простые делители числа D мы разобьем на группы следующим образом. Пусть τ обозначает наибольшее целое число с условием

$$2^{\lambda^{\tau-1}} \leqslant \sqrt{N}.$$

Тогда получим τ групп простых чисел, если включим в s-ую группу ($s=1, \ldots, \tau$) числа p с условием

$$2^{\lambda^{s-1}} \leqslant p < 2^{\lambda^s}.$$

2° Из определения числа τ следует

$$\tau = \frac{\log r}{\log \lambda}.$$

3° Для числа ν простых сомножителей какого-либо $d \leqslant N$ находим границу

$$\nu \leqslant r-1.$$

4° Рассматриваемые значения d мы разбиваем на классы следующим образом: к одному и тому же классу относим значения d с равным числом сомножителей, принадлежащих одним и тем же группам. Ввиду 2° и 3° число всех классов будет

$$< r^{\frac{\log r}{\log \lambda}}.$$

5° Пусть f_s обозначает произведение простых сомножителей s-ой группы, входящих в число d избранного класса, и l_s обозначает число таких сомножителей ($f_s=1$, $l_s=0$, если такие сомножители отсутствуют). Имеем

$$d = f_1 \ldots f_\tau.$$

Полагая

$$\varphi_s = 2^{\lambda^{s-1} l_s}, \quad F_s = 2^{\lambda^s l_s},$$

имеем

$$\varphi_s \leqslant f_s < F_s.$$

Те же самые числа

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_\tau,$$
$$f_1, \ldots, f_\tau,$$
$$F_1, \ldots, F_\tau,$$

но переставленные одновременно в таком порядке, чтобы F_s шли, не возрастая, мы обозначим символами

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau,$$
$$g_1, \ldots, g_\tau,$$
$$G_1, \ldots, G_\tau.$$

Соответственно этому изменим и номера групп чисел p. Тогда и убедимся в справедливости нашей леммы.

ЛЕММА 6. *Пусть заданы две последовательности* (u) *и* (v) *целых положительных чисел, взаимно простых с* q, $N \geqslant N_0$, *где* N_0 *достаточно большое постоянное* > 1, $r = \log N$,

$$1 < U_1 < U_2 \leqslant N, \quad 1 \leqslant A \leqslant N,$$
$$(a, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant N,$$

n целое постоянное $\geqslant 1$,

$$S = \sum_u \varphi(u) \sum_v e^{2\pi i \frac{a}{q} u^n v^n},$$

где u пробегает числа последовательности (u) *с условием*

$$U_1 < u \leqslant U_2$$

и v, при данном u, пробегает числа последовательности (v) *с условием*

$$\frac{N-A}{u} < v \leqslant \frac{N}{u}.$$

Далее $\varphi(u)$ *обозначает функцию, принимающую для всех значений u интервала*

$$U_1 < u \leqslant U_2$$

неотрицательные значения, причем, каковы бы ни были числа u_1 *и* u_2 *с условием*

$$U_1 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant U_2,$$

всегда имеем

$$\sum_{u_1 < u \leqslant u_2} (\varphi(u))^r \ll u_2 F_r.$$

Пусть, наконец, ρ *произвольно малое положительное постоянное.*

Тогда имеем

$$S \ll A q^{\rho - \frac{1}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{q}{U_1}\right)\left(1 + \frac{U_2 q}{A}\right)\left(1 + \frac{U_2}{A}\right)} \, r F_2^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{Nq}{U_1} + U_2\right) r F_1.$$

Доказательство. 1° Весь интервал

$$U_1 < u \leqslant U_2$$

мы подразделим на $\ll r$ интервалов вида

$$U < u \leqslant U_0, \quad U_0 \leqslant 2U.$$

2° Рассмотрим часть S_0 суммы S, отвечающую одному из таких интервалов. Подразделив в свою очередь последний интервал на

$$\ll \frac{U}{q} + 1$$

новых интервалов вида

$$u_0 < u \leqslant u', \quad u' - u_0 \leqslant q,$$

будем иметь

$$S_0 = \sum\nolimits_0 S_1, \quad S_1 = \sum_{u_0 < u \leqslant u'} \varphi(u) \sum_{\frac{N-A}{u} < v < \frac{N}{u}} e^{2\pi i \frac{a}{q} u^n v^n}.$$

Сумму S_1 мы заменим приближенно суммой

$$S_2 = \sum_{u_0 < u \leqslant u'} \varphi(u) \sum_{\frac{N-A}{u_0} < v < \frac{N}{u_0}} e^{2\pi i \frac{a}{q} u^n v^n}.$$

Ввиду

$$\frac{N-A}{u}=\frac{N-A}{u_0}+O\left(\frac{Nq}{U^2}\right),\quad \frac{N}{u}=\frac{N}{u_0}+O\left(\frac{Nq}{U^2}\right)$$

имеем

$$S_1-S_2\ll\left(\frac{Nq}{U^2}+1\right)\sum_{u_0<u\leqslant u'}\varphi(u).$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_0 S_1-\sum\nolimits_0 S_2\ll\left(\frac{Nq}{U^2}+1\right)\sum_{U_1<u\leqslant U_0}\varphi(u)\ll\left(\frac{Nq}{U}+U\right)F_1.$$

Далее имеем

$$\left(\sum\nolimits_0 S_2\right)^2\ll\left(\frac{U}{q}+1\right)\sum\nolimits_0|S_2|^2.$$

Но каждую сумму S_2 можно разбить на

$$\ll\frac{A}{Uq}+1$$

сумм вида

$$S_3=\sum_{u_0<u\leqslant u'}\varphi(u)\sum_{v<v_0\leqslant v'}e^{2\pi i\frac{a}{q}u^n v^n},\quad v'-v_0\leqslant q,$$

причем

$$S_2^2\ll\left(\frac{A}{Uq}+1\right)\sum|S_3|^2,$$

где суммирование распространяется на все суммы S_3. Применяя к каждой сумме S_3 лемму 3, находим

$$S_3^2\ll q^{1+\rho}\sum_{u_0<u\leqslant u'}(\varphi(u))^2\sum_{v_0<v\leqslant v'}1,$$

$$S_2^2\ll q^{1+\rho}\left(\frac{A}{Uq}+1\right)\sum_{u_0<u\leqslant u'}(\varphi(u))^2\left(\frac{A}{U}+1\right).$$

Вместе с тем имеем

$$\left(\sum\nolimits_0 S_2\right)^2\ll\left(\frac{U}{q}+1\right)UF_2\left(\frac{A}{Uq}+1\right)\left(\frac{A}{U}+1\right)q^{1+\rho}=$$
$$=A^2q^{\rho-1}\left(1+\frac{q}{U}\right)\left(1+\frac{Uq}{A}\right)\left(1+\frac{U}{A}\right)F_2,$$

$$S_0\ll Aq^{\frac{\rho}{2}-\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1+\frac{q}{U}\right)\left(1+\frac{Uq}{A}\right)\left(1+\frac{U}{A}\right)}F_2^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{Nq}{U}+U\right)F_1,$$

откуда лемма 6 следует непосредственно.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* ε, η *и* h *произвольно малые положительные постоянные* <1, $N>2$, $r=\log N$, $(a, q)=1$, $e^{r^\varepsilon}<q$, $N^{\frac{2}{3}+h}q^{\frac{3}{2}}\leqslant A\leqslant N$, *n целое положительное постоянное,*

$$S=\sum_{N-A<p\leqslant N}e^{2\pi i\frac{a}{q}p^n}.$$

Тогда имеем

$$S\ll Aq^{\eta-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство[4]. 1° Положим $\eta=2\rho$. Имеем

$$S=\sum_d\sum_m\mu(d)e^{2\pi i\frac{a}{q}d^n m^n}+O(\sqrt{N}),$$

[4] Сравн. мою статью в Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., (1938), № 1

где d пробегает делители произведения всех простых чисел $\leqslant \sqrt{N}$, не входящих в q, а m пробегает числа натурального ряда, взаимно простые с q, причем суммирование распространяется на область

$$N-A<dm\leqslant N.$$

Далее находим

$$\sum_d \sum_m \mu(d)\, e^{2\pi i \frac{a}{q} d^n m^n} = T_0 - T_1,$$

где T_0 есть сумма слагаемых, отвечающих значениям d с четным числом простых делителей, а T_1 есть сумма слагаемых, отвечающих значениям d с нечетным числом простых делителей. Мы рассмотрим далее какую-либо одну из сумм T_0 и T_1, которую обозначим символом T_2.

2° Числа $d\leqslant N$ разобьем на классы с условиями, указанными в лемме 5, причем сохраним все обозначения этой леммы.

3° Числа m мы также разобьем на $\ll r$ классов. К одному классу будут принадлежать все числа m, лежащие в некотором интервале вида

$$M<m\leqslant M_0, \quad M_0\leqslant 2M.$$

4° Часть суммы T_2, отвечающую выбранным классам значений d и m, обозначим символом T_3.

5° Пусть сначала

$$MG_1\ldots G_\tau > N^{\frac{1}{3}},$$

причем β первое из чисел ряда $1, \ldots, \tau$ с условием

$$MG_1\ldots G_\beta > N^{\frac{1}{3}}.$$

6° Пусть $\beta>1$. Тогда, полагая

$$u=mg_1\ldots g_\beta, \quad v=g_{\beta+1}\ldots g_\tau,$$

имеем

$$MG_1\ldots G_{\beta-1}\leqslant N^{\frac{1}{3}}, \quad G_\beta\leqslant G_{\beta-1}, \quad MG_1\ldots G_\beta\leqslant N^{\frac{2}{3}}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$T_3=\sum_u \varphi(u)\sum_v e^{2\pi i\frac{a}{q}u^n v^n},$$

где u пробегает целые числа с условием

$$N^{\frac{1}{3\lambda}}<u\leqslant 2N^{\frac{2}{3}},$$

а v, при данном u, пробегает целые числа с условием

$$\frac{N-A}{u}<v\leqslant\frac{N}{u}.$$

При этом $\varphi(u)$ не превосходит числа $\tau(u)$ делителей числа u. Следовательно, числа F_1 и F_2, указанные в лемме 6, здесь будут удовлетворять условиям

$$F_1\ll r, \quad F_2\ll r^3.$$

Применяя лемму 6, получим

$$T_3 \ll Aq^{\rho-\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1+\frac{q}{N^{\frac{1}{3\lambda}}}\right)\left(1+\frac{N^{\frac{2}{3}}q}{A}\right)r^{\frac{5}{2}} + (N^{1-\frac{1}{3\lambda}}q + N^{\frac{2}{3}})r^2} \ll Ar^{\frac{5}{2}}q^{\rho-\frac{1}{2}}.$$

7° Пусть $\beta=1$. Полагая, ради краткости, $l_1 = \varkappa$ и обозначая символом $\varkappa_1$ наименьшее целое с условием

$$MG^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} > N^{\frac{1}{3}},$$

мы каждое d представим в форме

$$d = u_0 v,$$

где u_0 есть произведение $\varkappa_1$ простых сомножителей числа g_1, а v является произведением $\varkappa - \varkappa_1$ оставшихся сомножителей числа g_1 и всех $g_2, \ldots, g_\tau$. Здесь имеем (при $\varkappa_1 > 1$)

$$T_3 = \frac{1}{\binom{\varkappa}{\varkappa_1}} T_3', \quad T_3' = \sum_u \varphi(u) \sum_v e^{2\pi i \frac{a}{q} u^n v^n},$$

где u пробегает значения произведения mu_0 и $\varphi(u)$ обозначает число решений неопределенного уравнения

$$mu_0 = u.$$

Далее, находим

$$T_3' = \sum_\delta \mu(\delta) W_\delta, \quad W_\delta = \sum_{u_1} \varphi(u_1\delta) \sum_{v_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} \delta^{2n} u_1^n v_1^n},$$

где δ пробегает все возможные делители чисел g_1, и, при данном δ, u_1 и v_1 пробегают частные от деления чисел u и v на δ.

Здесь будем иметь

$$\varphi(u_1\delta) \leqslant \tau(u_1\delta) \leqslant \tau(u)\tau(\delta),$$

и потому, применяя лемму 6 к сумме W_δ, мы можем считать

$$F_1 \ll r\tau(\delta), \quad F_2 \ll r^3\tau(\delta).$$

В сумме W_δ u_1 пробегает значения с условием

$$\frac{N^{1-\frac{1}{3\lambda}}}{\delta} < u_1 \leqslant 2\frac{N^{\frac{2}{3}}}{\delta},$$

и v_1, при данном u_1, пробегает значения с условием

$$\frac{N-A}{\delta^2 u_1} < v_1 \leqslant \frac{N}{\delta^2 u_1}.$$

8° Очевидно $\delta \leqslant \sqrt{N}$. Пусть, кроме того,

$$\delta < q.$$

Тогда можно применить лемму 6. Находим

$$W_\delta \ll \frac{A}{\delta^2} q^{\rho-\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1+\frac{q\delta}{N^{\frac{1}{3\lambda}}}\right)\left(1+\frac{N^{\frac{2}{3}}q\delta}{A}\right)\left(1+\frac{N^{\frac{2}{3}}\delta}{A}\right)r^{\frac{5}{2}}\tau(\delta) + \left(\frac{N^{1-\frac{1}{3\lambda}}q}{\delta} + \frac{N^{\frac{2}{3}}}{\delta}\right)r\tau(\delta)} \ll A\frac{\tau(\delta)}{\delta} q^{\rho-\frac{1}{2}} r^{\frac{5}{2}}.$$

9° Если же $\delta > q$, то W_δ не превосходит числа систем значений m, $\frac{u_0}{\delta}$, v_1 с условием

$$\frac{N-A}{\delta^2} < m\frac{u_0}{\delta}v_1 \leqslant \frac{N}{\delta^2}$$

и, следовательно, согласно известному свойству функции $\tau(a)$,

$$W_\delta \ll \left(\frac{A}{\delta^2} + \frac{\sqrt{N}}{\delta}\right) r^2,$$

что содержится как частный случай в неравенстве, доказанном в 8°.

10° Поэтому, ввиду $\delta \leqslant \sqrt{N}$ и 7°

$$T_3 \ll T_3' \ll Ar^{\frac{9}{2}} q^{\rho-\frac{1}{2}}.$$

Аналогичным путем выводим такую же оценку и при $\varkappa_1 = 1$.

11° Теперь рассмотрим случай, когда

$$M \geqslant N^{\frac{1}{3}}.$$

В этом случае $d < N^{\frac{2}{3}}$, $A > dq$. Сумму

$$S_d = \sum_{\frac{N-A}{d} < m \leqslant \frac{N}{d}} e^{2\pi i \frac{a}{q} d^n m^n}$$

можно разбить на

$$\ll \frac{A}{dq}$$

сумм, каждая из которых, согласно лемме 4, будет

$$\ll q^{\rho+\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$S_d \ll \frac{A}{d} q^{\rho-\frac{1}{2}}, \qquad T_3 \ll Arq^{\rho-\frac{1}{2}}.$$

12° Наконец, в случае

$$MG_1 \ldots G_\tau < N^{\frac{1}{3}},$$

очевидно, имеем

$$T_3 \ll N^{\frac{1}{3}} r \ll Aq^{-\frac{1}{2}}.$$

13° Ввиду оценок для T_3, данных в 6°, 10°, 11°, 12° леммы 5 и 1° и 4° мы и убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

Замечание. Путем улучшения леммы 6 указанные в теореме 2 неравенства для A можно заменить на

$$N^{\frac{2}{3}+h} q \leqslant A \leqslant N.$$

Более общие результаты для случая $n=1$. Ввиду особой важности случая $n=1$, мы вместо теоремы 2 для этого случая докажем более общую теорему.

ЛЕММА 7[5]. *Пусть* $N \geqslant N_0$, *где* N_0 *достаточно большое постоянное* > 1, $r = \log N$,

$$W \geqslant 1, \quad 1 \leqslant V \leqslant N, \quad k \text{ целое } > 0,$$

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant N,$$

t *пробегает целые числа (все или часть) некоторого интервала длиною* $\ll V$,

$$S = \sum \min\left(W, \frac{1}{2(\lambda k t)}\right).$$

Тогда имеем

$$S \ll \left(\frac{V}{q} + 1\right)(kW + qr).$$

ЛЕММА 8. *Пусть заданы две последовательности* (u) *и* (v) *целых положительных чисел,* $N \geqslant N_0$, *где* N_0 *достаточно большое постоянное* > 1, $r = \log N$,

$$1 \leqslant U_1 < U_2 \leqslant N, \quad U_2 \leqslant A \leqslant N, \quad k \text{ целое } > 0,$$

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant N,$$

$$S = \sum_u \varphi(u) \sum_v e^{2\pi i \lambda k u v},$$

где u *пробегает числа последовательности* (u) *с условием*

$$U_1 < u \leqslant U_2$$

и v, *при данном* u, *пробегает числа последовательности* (v) *с условием*

$$\frac{N - A}{u} < v \leqslant \frac{N}{u}.$$

Далее $\varphi(u)$ *обозначает функцию, принимающую для всех значений* u *интервала*

$$U_1 < u \leqslant U_2$$

неотрицательные значения; при этом, каковы бы ни были числа u_1 *и* u_2 *с условиями*

$$U_1 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant U_2,$$

всегда имеем

$$\sum_{u_1 < u \leqslant u_2} (\varphi(u))^2 \ll u_2 F_2.$$

Тогда

$$S \ll A \sqrt{F_2} \sqrt{\frac{k}{q} + \frac{kU_2}{A} + \frac{N}{U_1 A} + \frac{Nq}{A^2}}\, r^{\frac{3}{2}}.$$

Доказательство. 1° Достаточно рассматривать лиш ай

$$A \geqslant \max\left(U_2, \frac{N}{U_1}, \sqrt{Nq}\right).$$

Весь интервал

$$U_1 < u \leqslant U_2$$

мы подразделим на $\ll r$ интервалов вида

$$U < u \leqslant U_0, \quad U_0 \leqslant 2U.$$

---

[5] См. мою работу «Оценки тригонометрических сумм», Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем. (1938), № 5—6.

2° Рассмотрим часть S_0 суммы S, отвечающую одному из таких интервалов. Подразделив в свою очередь последний интервал на

$$\ll \frac{N}{A}$$

новых интервалов вида

$$u_1 < u \leqslant u_2, \quad u_2 - u_1 \ll \frac{AU}{N},$$

будем иметь

$$S_0 = \sum\nolimits_1 S_1, \quad S_1 = \sum_{u_1<u\leqslant u_2} \varphi(u) \sum_{\frac{N-A}{u}<v\leqslant\frac{N}{u}} e^{2\pi i\lambda kuv},$$

$$S_0^2 \ll \frac{N}{A}\sum\nolimits_1 |S_1|^2, \quad S_1^2 \ll \sum_{u_1<u\leqslant u_2} (\varphi(u))^2 R,$$

$$R = \sum_{u_1<u\leqslant u_2} \sum_{\frac{N-A}{u}<v\leqslant\frac{N}{u}} \sum_{\frac{N-A}{u}<v_1\leqslant\frac{N}{u}} e^{2\pi i\lambda ku(v-v_1)},$$

где u пробегает уже все целые числа указанного интервала.

Чтобы оценить R, изменим порядок суммирования. Очевидно, v и v_1 могут принимать лишь значения с условием

$$\frac{N-A}{u_2} < v \leqslant \frac{N}{u_1}, \quad \frac{N-A}{u_2} < v_1 \leqslant \frac{N}{u_1},$$

а u, при выбранных v и v_1, пробегают значения, лежащие в интервале

$$u' < u \leqslant u'', \quad u' = \max\left(u_1, \quad \frac{N-A}{v}, \quad \frac{N-A}{v_1}\right),$$

$$u'' = \min\left(u_2, \quad \frac{N}{v}, \quad \frac{N}{v_1}\right).$$

Поэтому, ввиду $u'' - u' \leqslant u_2 - u_1 \ll \frac{AU}{N}$, имеем

$$R \ll \sum_v \sum_{v_1} \min\left(\frac{AU}{N}, \quad \frac{1}{2(\lambda k(v-v_1))}\right),$$

или, замечая, что v, при данном v_1, пробегает числа, лежащие в интервале длиною

$$\frac{N}{u_1} - \frac{N-A}{u_2} = \frac{N(u_2-u_1)+Au_1}{u_1u_2} \ll \frac{A}{U},$$

согласно лемме 7 находим

$$R \ll R_0, \quad R_0 = \frac{A}{U}\left(\frac{A}{Uq}+1\right)\left(k\frac{AU}{N}+qr\right).$$

Вместе с тем окажется

$$S_1^2 \ll \sum_{u_1<u\leqslant u_2} (\varphi(u))^2 R_0, \quad S_0^2 \ll \frac{N}{A} R_0 \sum_{U<u\leqslant U_0} (\varphi(u))^2 \ll$$

$$\ll \frac{NU}{A} F_2 R_0 \ll A^2 F_2 \left(\frac{1}{Uq}+\frac{1}{A}\right)\left(kU+\frac{Nqr}{A}\right),$$

$$S_1 = A\sqrt{F_2}\sqrt{\frac{k}{q}+\frac{kU}{A}+\frac{Nr}{UA}+\frac{Nqr}{A^2}},$$

откуда лемма 8 следует непосредственно.

ЛЕММА 9[6]. *Пусть k целое >0,*

$$N>2,\quad r=\log N,\quad 1<d_0<A\leqslant N,$$
$$\lambda=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,\ q)=1,\quad 0<q\leqslant N.$$

Тогда имеем

$$\sum_{0<d\leqslant d_0}\min\left(\frac{A}{d},\ \frac{1}{2(\lambda k d)}\right)\ll\left(d_0+q+\frac{k^2A}{q}\right)r.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть h произвольно малое положительное постоянное $\leqslant\frac{1}{6}$, $N>2$, $r=\log N$, k целое >0,*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,\ q)=1,\quad 0<q\leqslant N,$$
$$1\leqslant A\leqslant N,$$
$$S=\sum_{N-A<p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha kp}.$$

Тогда имеем $(\lambda=1+h)$

$$S\ll Ar^{\frac{\log r}{\log\lambda}+6}\sqrt{\frac{kN^{\frac{2+h}{3}}}{A}+\frac{Nq}{A^2}+\frac{k}{q}+\frac{k^4}{q^2}}.$$

Доказательство. 1° Имеем

$$S=\sum_d\sum_m\mu(d)\,e^{2\pi i\alpha km}+O(\sqrt{N}),$$

где d пробегает делители произведения всех простых чисел $\leqslant\sqrt{N}$, а m пробегает числа натурального ряда, причем суммирование распространяется на область

$$N-A<dm\leqslant N.$$

Далее находим

$$\sum_d\sum_m\mu(d)\,e^{2\pi i\alpha kdm}=T_0-T_1,$$

где T_0 есть сумма слагаемых, отвечающих значениям d с четным числом простых делителей, и T_1 есть сумма слагаемых, отвечающих значениям d с нечетным числом простых делителей. Мы рассмотрим, далее, какую-либо одну из сумм T_0 и T_1, которую обозначим символом T_2.

2° Числа $d\leqslant N$ разобьем на классы с условиями, указанными в лемме 5, причем сохраним все обозначения леммы 5.

3° Числа m мы также разобьем на $\ll r$ классов. К одному и тому же классу будут принадлежать все числа m, лежащие в некотором интервале вида

$$M<m\leqslant M_0,\quad M_0\leqslant 2M.$$

4° Часть суммы T_2, отвечающую выбранным классам значений d и m, обозначим символом T_3.

[6] См. мою работу «Новая оценка одной тригонометрической суммы, содержащей простые числа», Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем. (1938), № 1.

5° Пусть сначала

$$MG_1 \ldots G_\tau > N^{\frac{1}{3}},$$

причем β первое из чисел ряда $1, \ldots, \tau$ с условием

$$MG_1 \ldots G_\beta > N^{\frac{1}{3}}.$$

6° Пусть $\beta > 1$. Тогда, полагая

$$u = mg_1 \ldots g_\beta, \quad v = g_{\beta+1} \ldots g_\tau,$$

имеем

$$MG_1 \ldots G_{\beta-1} \leqslant N^{\frac{1}{3}}, \quad G_\beta \leqslant G_{\beta-1}, \quad MG_1 \ldots G_\beta \leqslant N^{\frac{2}{3}}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$T_3 = \sum_u \varphi(u) \sum_v e^{2\pi i \alpha kuv},$$

где u пробегает целые числа с условием

$$N^{\frac{1}{3\lambda}} < u \leqslant 2N^{\frac{2}{3}},$$

а v, при данном u, пробéгает целые числа с условием

$$\frac{N-A}{u} < v \leqslant \frac{N}{u}.$$

При этом $\varphi(u)$ не превосходит числа $\tau(u)$ делителей числа u. Следовательно, число F_2, указáнное в лемме 8, здесь будет удовлетворять условию

$$F_2 \ll r^3.$$

Применяя лемму 8, получим

$$T_3 \ll A\sqrt{r^6}\sqrt{\frac{k}{q} + \frac{kN^{\frac{2}{3}}}{A} + \frac{N^{1-\frac{1}{3\lambda}}}{A} + \frac{Nq}{A^2}}.$$

7° Пусть $\beta = 1$. Полагая ради краткости $l_1 = \varkappa$ и обозначая символом $\varkappa_1$ наименьшее целое с условием

$$MG_1^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} > N^{\frac{1}{3}},$$

мы каждое d представим в форме

$$d = u_0 v,$$

где u_0 есть произведение $\varkappa_1$ простых сомножителей числа g_1, а v является произведением $\varkappa - \varkappa_1$ оставшихся сомножителей g_1 и всех $g_2, \ldots, g_\tau$.

Здесь имеем (при $\varkappa_1 > 1$)

$$T_3 = \frac{1}{\binom{\varkappa}{\varkappa_1}} T_3', \quad T_3' = \sum_u \varphi(u) \sum_v e^{2\pi i \alpha kuv},$$

где u пробегает значения произведения mu_0 и $\varphi(u)$ обозначает число решений неопределенного уравнения

$$mu_0 = u.$$

Так же, как и раньше, выводим

$$N^{\frac{1}{3\lambda}} < u \leqslant 2N^{\frac{2}{3}}.$$

Далее находим

$$T_3' = \sum_{\delta} \mu(\delta) W_\delta, \quad W_\delta = \sum_{u_1} \varphi(u_1\delta) \sum_{v_1} e^{2\pi i \alpha k \delta^2 u_1 v_1},$$

где δ пробегает все возможные делители числа g_1 и, при данном δ, u_1 и v_1 пробегают частные от деления чисел u и v на δ.

Здесь будем иметь

$$\varphi(u_1\delta) \leqslant \tau(u_1\delta) \leqslant \tau(u_1)\tau(\delta)$$

и потому, применяя лемму 8 к сумме W, мы можем считать

$$F_2 \leqslant r^3 \tau(\delta).$$

В сумме W_δ, u_1 пробегает значения с условием

$$\frac{N^{\frac{1}{3\lambda}}}{\delta} < u_1 \leqslant \frac{2N^{\frac{2}{3}}}{\delta},$$

и v_1, при данном u_1, пробегает значения с условием

$$\frac{N-A}{\delta^2 u_1} < v_1 \leqslant \frac{N}{\delta^2 u_1}.$$

8° Очевидно, $\delta \leqslant \sqrt{N}$. Пусть, кроме того,

$$\delta \leqslant \delta_0, \quad \delta_0 = \min\left(N^{\frac{1}{3\lambda}},\ AN^{-\frac{2}{3}},\ \sqrt{A}\right).$$

Тогда можно применить лемму 8. Находим

$$W_\delta \ll \frac{A}{\delta^2}\sqrt{r^6\tau(\delta)}\sqrt{\frac{k}{q} + \frac{kN^{\frac{2}{3}}\delta}{A} + \frac{N^{1-\frac{1}{3\lambda}}\delta}{A} + \frac{Nq\delta^2}{A^2}}.$$

9° Если же $\delta > \delta_0$, то W_δ не превосходит числа систем значений m, $\frac{u_0}{\delta}$, v_1 с условием

$$\frac{N-A}{\delta^2} < m\frac{u_0}{\delta}v_1 \leqslant \frac{N}{\delta^2},$$

и следовательно, согласно известному свойству функции $\tau(a)$,

$$W_\delta \ll \left(\frac{A}{\delta^2} + \frac{\sqrt{N}}{\delta}\right) r^2,$$

что является частным случаем неравенства, доказанного в 8°.

10° Ввиду доказанного, суммируя на все δ, находим

$$T_3 \ll A\sqrt{\frac{k}{q} + \frac{kN^{\frac{2}{3}}}{A} + \frac{N^{1-\frac{1}{3\lambda}}}{A} + \frac{Nq}{A^2}}\, r^5.$$

Аналогичным путем выводим такую же оценку и при $\varkappa_1 = 1$.

11° Теперь рассмотрим случай

$$M > N^{\frac{1}{3}}.$$

В этом случае имеем $d < N^{\frac{2}{3}}$ и

$$T_3 = \sum S_d, \quad S_d = \sum_m e^{2\pi i \alpha k d m},$$

где d и m пробегают числа избранных классов. При этом m, в сумме S_d, пробегает значения с условием

$$M < m \leqslant M_0, \quad \frac{N-A}{d} < m \leqslant \frac{N}{d}.$$

Здесь имеем (при $A \geqslant N^{\frac{2}{3}}$)

$$S_d \ll \min\left(\frac{A}{d}, \frac{1}{2(\alpha k d)}\right)$$

и потому, согласно лемме 9,

$$T_3 \ll \left(N^{\frac{2}{3}} + q + \frac{k^2 A}{q}\right) r.$$

12°. Наконец, в случае

$$MG_1 \ldots G_\tau \leqslant N^{\frac{1}{3}},$$

очевидно, имеем

$$T_3 \ll N^{\frac{1}{3}} r.$$

13° Собирая доказанное в 1°, 2°, 4°, 6°, 11°, 12°, имеем

$$S \ll A r^{\frac{\log r}{\log \lambda} + 6} \sqrt{\frac{k}{q} + \frac{kN^{\frac{2}{3}}}{A} + \frac{N^{1-\frac{1}{3\lambda}}}{A} + \frac{Nq}{A^2} + \frac{k^4}{p^2}},$$

откуда теорема 3 следует непосредственно.

ЛЕММА 10 [7]. *Пусть ε произвольно малое положительное постоянное,*

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 0.$$

Пусть, далее, k и g независимо друг от друга пробегают значения

$$1, 2, \ldots, K$$
$$1, 2, \ldots, G.$$

Тогда число значений символа $(\lambda k g)$, не превосходящих q^{-1}, будет

$$\ll (KGq^{-1} + 1)(KG)^{\varepsilon}.$$

ЛЕММА 11. *Пусть h произвольно малое положительное постоянное < 1, $N > N_0$, где N_0 достаточно большое постоянное > 2, $r = \log N$,* $\max\left(N^{\frac{2}{3}}, N^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant A \leqslant N$,

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant N.$$

Пусть, далее, k пробегает значения $1, \ldots, K$, причем каждому k приведено в соответствие число g, удовлетворяющее условию

$$\lambda k = \frac{c}{g} + \frac{\theta_1}{gq}, \quad (c, g) = 1, \quad 0 < g \leqslant q, \quad |\theta_1| < 1.$$

Тогда, полагая

$$D_k = \min\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{N^{\frac{2+h}{3}}}{A} + \frac{Ng}{A^2} + \frac{1}{g}}, \ \frac{1}{k}\sqrt{\frac{kN^{\frac{2+h}{3}}}{A} + \frac{Nq}{A^2} + \frac{k^2}{q}}\right),$$

$$S = \sum_{0<k\leqslant q} D_k,$$

[7] См. мою работу, опубликованную в Изв. Ак. Наук СССР, 1927, стр. 567—578, лемма V.

будем иметь

$$S \ll r^2 \sqrt{\frac{N^{\frac{2}{3}+h}}{A} + \frac{N^{1+h}q^{1-h}}{A^2} + \frac{1}{q^{1-h}}}\,.$$

Доказательство. 1° Сначала рассмотрим часть суммы S с

$$q > N^{\frac{5}{6}}, \quad g > N^{\frac{1}{6}}.$$

В этом случае очевидно

$$D_k \ll \frac{1}{k}\sqrt{\frac{Nq}{A^2}}\,.$$

Следовательно, часть суммы S, отвечающая такому случаю, будет

$$\ll r\sqrt{\frac{Nq}{A^2}}\,.$$

2° Теперь рассмотрим случаи

$$q \leqslant N^{\frac{5}{6}}; \quad q > N^{\frac{5}{6}}, \quad g \leqslant N^{\frac{1}{6}}.$$

Сначала оценим часть суммы S, включающую слагаемые с условием

$$kg \geqslant q.$$

Для этой цели мы все значения k и, равным образом, все значения g разобьем на группы следующим образом:

$k = 1,$ $\qquad g = 1,$
$k = 2, 3,$ $\qquad g = 2, 3,$
$k = 4, 5, 6, 7,$ $\qquad g = 4, 5, 6, 7,$
. . . . $\qquad$ . . . .
$k = 2^s, 2^s + 1, \ldots, q,$ $\qquad g = 2^s, 2^s + 1, \ldots, q.$

Пусть $\varkappa, \varkappa + 1, \ldots, \varkappa + \varkappa'$; $\gamma, \gamma + 1, \ldots, \gamma + \gamma'$ какие-либо две группы чисел k и g. Числа k и g, принадлежащие этим группам, могут удовлетворять неравенству $kg \geqslant q$ лишь в случае

$$4\varkappa\gamma \geqslant q.$$

Предположим это условие выполненным. Имеем

$$\lambda k = \frac{c}{g} + \frac{\theta}{gq}, \quad \lambda kg = c + \frac{\theta}{q}$$

и потому, согласно лемме 10, сумма слагаемых суммы S с условием, что k и g принадлежат избранным группам, будет

$$\ll \varkappa^{\varepsilon}\gamma^{1+\varepsilon}q^{-1}\sqrt{\frac{N^{\frac{2+h}{3}}}{A} + \frac{N\gamma}{A^2} + \frac{1}{\gamma}} \ll$$
$$\ll q^{2\varepsilon}\sqrt{\frac{N^{\frac{2+h}{3}}}{A} + \frac{Nq}{A^2} + \frac{1}{q}} \ll \sqrt{\frac{N^{\frac{2}{3}+h}}{A} + \frac{N^{1+h}q^{1-h}}{A^2} + \frac{1}{q^{1-h}}}\,.$$

Суммируя же на все возможные пары групп, мы получим величину

$$\ll r^2\sqrt{\frac{N^{\frac{2}{3}+h}}{A} + \frac{N^{1+h}q^{1-h}}{A^2} + \frac{1}{q^{1-h}}}\,.$$

3° Наконец, оценим часть суммы S, отвечающую случаю

$$kg < q.$$

Сравнивая два различных выражения для λk, имеем

$$\frac{c}{g} + \frac{\theta_1}{gq} = \frac{ak}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad |akg - cq| < 2.$$

Следовательно, разность $akg - cq$ равна 0, или же $\nu = \pm 1$. Но первое невозможно ввиду $(a, q) = 1$, $kg < q$. Поэтому

$$akg - ch = \nu.$$

Обозначая буквою z_0 наименьшее положительное решение сравнения

$$az \equiv \nu \pmod q,$$

очевидно имеем $kg = z_0$. А так как число решений в целых положительных k и g этого уравнения будет $\ll q^{\varepsilon}$, то того же порядка будет и число членов нашей суммы с условием $kg < h$. Каждый же член будет

$$\ll \frac{1}{k} \sqrt{\frac{kN^{\frac{2+h}{3}}}{A} + \frac{Nq}{A^2} + \frac{k^2}{q}}.$$

Поэтому соответствующая рассматриваемому случаю часть суммы S будет

$$\ll r \sqrt{\frac{N^{\frac{2}{3}+h}}{A} + \frac{N^{1+h}q^{1-h}}{A^2} + \frac{1}{q^{1-h}}}.$$

Из 1°, 2° и 3° лемма следует непосредственно.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть ε и h произвольно малые положительные постоянные $\leqslant \frac{1}{6}$, $N > N_0$, где N_0—достаточно большое постоянное > 2, $r = \log N$,*

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant N,$$
$$1 \leqslant A \leqslant N, \quad 0 < \delta \leqslant 1.$$

Пусть, далее, T обозначает число всех значений дроби

$$\{\lambda p\}, \quad N - A < p \leqslant N$$

и T_1 обозначает число значений той же дроби с условием

$$0 \leqslant \{\lambda p\} \leqslant \delta.$$

Тогда имеем

$$T_1 = \sigma T + O(A\Delta),$$

$$\Delta = e^{r^{\varepsilon}} \sqrt{\frac{N^{\frac{2}{3}+h}}{A} + \frac{N^{1+h}q^{1-h}}{A^2} + \frac{1}{q^{1-h}}}.$$

Доказательство. 1° Согласно лемме 14 главы I моей книги «Новый метод в аналитической теории чисел»[8] (предполагаем $\Delta < 0.5$, иначе теорема 4 очевидна) существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и со следующими свойствами:

[8] Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. X, 1937.

Пусть α и β вещественные, причем

$$0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - 2\Delta.$$

Тогда

1. $\psi(x) = 1$ в интервале $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$;
2. $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ в интервалах $\alpha - \Delta \leqslant x \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant x \leqslant \beta + \Delta$;
3. $\psi(x) = 0$ в интервале $\beta + \Delta \leqslant x \leqslant 1 + \alpha - \Delta$;
4. $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \Delta + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx),$$

где

$$a_k \leqslant \frac{1}{k}, \quad b_k \ll \frac{1}{k}, \quad \text{если } k < \frac{1}{\Delta},$$
$$a_k \ll \frac{1}{\Delta k^2}, \quad b_k \ll \frac{1}{\Delta k^2}, \text{ если } k \geqslant \frac{1}{\Delta}.$$

2° Применяя 1° и теорему 3, находим

$$\sum_{N-A<p\leqslant N} \psi(\lambda p) = (\beta - \alpha + \Delta) T + AR,$$
$$\frac{1}{\Delta k^2} \sqrt{\frac{k^4}{q^2}} = \frac{1}{\Delta \sqrt{q}} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2}{q}} \ll \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2}{q}},$$
$$R \ll r^{\frac{\log r}{\log \lambda}+6} \sum_{0<k\leqslant q} D_k + \sum_{k>q} \frac{1}{\Delta k^2} \ll \Delta + \frac{1}{\Delta q} \ll \Delta.$$

Отсюда, рассуждая так же, как в указанной моей книге [8] (глава VIII), мы убеждаемся в справедливости теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. (*Распределение простых чисел по данному модулю.*) *Пусть η произвольно малое положительное постоянное < 1, $N > 2$,*

$$1 \leqslant A \leqslant N, \ 1 \leqslant Q \leqslant N,$$
$$0 \leqslant \delta \leqslant 1.$$

Все простые числа p интервала

$$N - A < p \leqslant N$$

заменим их остатками P от деления на Q. Пусть T обозначает число всех этих остатков (т. е. число всех простых чисел интервала $N - A < p \leqslant N$) и T_1 обозначает число тех из них, которые лежат в интервале

$$0 \leqslant P \leqslant \delta Q.$$

Тогда имеем

$$T_1 = \delta T + O(A\Delta),$$
$$\Delta = N^{\eta} \sqrt{\frac{N^{\frac{2}{3}}}{A} + \frac{NQ}{A^2} + \frac{1}{Q}}.$$

Доказательство. Положим в теореме 4

$$\lambda = \frac{1}{Q}.$$

Тогда, представляя λ в форме

$$\lambda = \frac{1}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad q = [Q],$$

мы и получим теорему 5 как непосредственное следствие теоремы 4.

Частный случай. Наиболее простой вид закон распределения простых чисел по данному модулю Q, выражаемый теоремой 5, имеет при

$$A \geqslant N^{\frac{2}{3}} Q.$$

Тогда имеем просто

$$T_1 = \delta T + O\left(N^{\eta} \frac{A}{\sqrt{Q}}\right).$$

Пример 1. Пусть $A = N^{\frac{5}{6}}$, $Q = N^{\frac{1}{6}}$, $\delta = \frac{1}{2}$. Заменив согласно нашей теореме (частный случай) все простые числа интервала

$$N - N^{\frac{5}{6}} < p \leqslant N$$

остатками от деления их на $N^{\frac{1}{6}}$, обозначая далее символом T число всех остатков и символом T_1 число тех остатков, которые $\leqslant \frac{1}{2} N^{\frac{1}{6}}$, будем иметь

$$T_1 = \frac{1}{2} T + O\left(N^{\frac{5}{6} + \varepsilon - \frac{1}{12}}\right).$$

Пример 2. Пусть $A = N$, $Q = N^{\frac{1}{3}}$, $\delta = \frac{1}{2}$. Заменив все простые числа $p \leqslant N$ их остатками от деления на $N^{\frac{1}{3}}$, обозначая далее символом T число всех остатков и символом T_1 число тех из них, которые $\leqslant \frac{1}{2} N^{\frac{1}{3}}$, будем иметь

$$T_1 = \frac{1}{2} T + O\left(N^{1 + \eta - \frac{1}{6}}\right).$$

Замечание. Применяя мой метод, можно доказать теорему, аналогичную теореме 5, и в том случае, если вместо всех простых чисел интервала

$$N - A < p \leqslant N$$

будем рассматривать те из них, которые обладают некоторыми арифметическими особенностями, например являются квадратичными вычетами или невычетами какого-либо модуля, вычетами или невычетами степени $n > 2$ и т. д.

Поправка к предыдущей работе. В моей предыдущей работе «Оценки тригонометрических сумм»[9] необходимо сделать следующие очевидные исправления:

В леммах 5 и 6 границы для k следует заменить более точными

$$k < \frac{\log U}{-\log(1-\nu)} + 1, \quad k < \frac{\log 2Z}{-\log(1-\nu)} + 1;$$

далее, в лемме 6 границу для числа слагаемых вида K следует заменить такой:

$$2^{\frac{bn}{6}} p_1^{bk} (p_1 \cdots p_k)^{-b},$$

соответственно чему ввести очевидные исправления в тех местах доказательств теорем 1 и 2, где я ссылаюсь на лемму 6.

Кроме того, в формулировке теоремы 2 следует взять

$$\rho = \frac{1}{(n+1)^3 \log 2(n+1)} \quad \text{вместо} \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3 \log(n+1)} .$$

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
4. V. 1939.

I. VINOGRADOW. ON THE ESTIMATIONS OF SOME SIMPLEST TRIGONOMETRICAL SUMS INVOLVING PRIME NUMBERS

SUMMARY

In the present paper the following theorems are proved.

THEOREM 1. *Let* ε *be a positive constant* $\leqslant \frac{1}{3}$, η *an arbitrarily small positive constant* $< \varepsilon$, $N > 2$, $r = \log N$,

$$Ne^{-r^{1-2\varepsilon}} \ll A \leqslant N,$$
$$(a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant e^{r^{\varepsilon}},$$

n an integral positive constant,

$$S = \sum_{N-A<p\leqslant N} e^{2\pi i - p^n}.$$

Then we have

$$S \ll \frac{A}{r^{1-3\varepsilon} q^{\frac{1}{2}-\eta}} .$$

[9] Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем. (1938), № 5—6.

THEOREM 2. *Let* ε, η *and* h *be arbitrarily small positive constants* <1, $N>2$, $r=\log N$, $(a, q)=1$, $e^{r^{\varepsilon}}<q$, $N^{\frac{2}{3}+h}q^{\frac{3}{2}}\leqslant A\leqslant N$, n *an integral positive constant*,

$$S=\sum_{N-A<p\leqslant N} e^{2\pi i\frac{a}{q}p^n}.$$

Then we have

$$S\ll Aq^{\eta-\frac{1}{2}}.$$

THEOREM 3. *Let* h *be an arbitrarily small positive constant* $\leqslant\frac{1}{6}$, $N>2$, $r=\log N$, k *an integer* >0,

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a, q)=1,\quad 0<q\leqslant N,$$
$$1\leqslant A\leqslant N,$$
$$S=\sum_{N-A<p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha kp}.$$

Then we have $(\lambda=1+h)$

$$S\ll Ar^{\frac{\log r}{\log\lambda}+6}\sqrt{\frac{kN^{\frac{2+h}{3}}}{A}+\frac{Nq}{A^2}+\frac{k}{q}+\frac{k^4}{q^2}}.$$

THEOREM 4. *Let* ε *and* h *be arbitrarily small positive constants* $\leqslant\frac{1}{6}$, $N\geqslant N_0$, *where* N_0 *is a sufficiently large constant* >2, $r=\log N$,

$$\lambda=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a, q)=1,\quad 1\leqslant q\leqslant N,$$
$$1\leqslant A\leqslant N,\quad 0<\delta\leqslant 1.$$

Let further T *denote the number of all values of the fraction*

$$\{\lambda p\},\quad N-A<p\leqslant N,$$

and T_1 — *the number of the values of the same fraction satisfying the condition*

$$0\leqslant\{\lambda p\}\leqslant\delta.$$

Then we have

$$T_1=\delta T+O(A\Delta),$$
$$\Delta=e^{r^{\varepsilon}}\sqrt{\frac{N^{\frac{2}{3}+h}}{A}+\frac{N^{1+h}q^{1-h}}{A^2}+\frac{1}{q^{1-h}}}.$$

THEOREM 5. *Let* η *be an arbitrarily small positive constant* <1, $N>2$,

$$1\leqslant A\leqslant N,\quad 1\leqslant Q\leqslant N,$$
$$0<\delta\leqslant 1.$$

Replace all primes p *in the interval*

$$N-A<p\leqslant N$$

by their residues P *to the modulus* Q. *Let* T *be the number of all these residues (i. e., the number of all primes in the interval* $N-A<p\leqslant N$), *and* T_1 *denote the number of those of them, which lie in the interval*

$$0<P\leqslant\delta Q.$$

Then we have

$$T_1=\Delta T+O(A\Delta),$$

$$\Delta=N^{\eta}\sqrt{\frac{N^{\frac{2}{3}}}{A}+\frac{NQ}{A^2}+\frac{1}{Q}}.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая   Série mathématique

А. К. МИТРОПОЛЬСКИЙ

О МНОЖЕСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В статье применяется способ Чебышева для выражения множественных нелинейных корреляционных уравнений при помощи степенных многочленов, определяется основная ошибка этих уравнений и приводятся формулы, удобные для вычислений.

1. Положим, что зависимость статистической величины X_3 от X_1 и X_2 выражается множественным нелинейным корреляционным уравнением вида

$$r^{(h_1, h_2)}_{(j_1)/(j_2)/1} = \sum_{g_1=0}^{h_1} \sum_{g_2=0}^{h_2} a_{g_1/g_2} \varphi_{g_1/g_2} (\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}). \tag{1}$$

В этом уравнении $\xi_{1(j_1)}$ и $\xi_{2(j_2)}$ представляют нормированные значения статистических величин X_1 и X_2, а $r^{(h_1, h_2)}_{(j_1)/(j_2)/1}$ есть условный основной момент статистической величины X_3, вычисленный в предположении, что статистическая величина X_1 приняла значение $\xi_{1(j_1)}$, а статистическая величина X_2—значение $\xi_{2(j_2)}$.

Коэффициенты a_{g_1/g_2} и функции $\varphi_{g_1/g_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)})$ уравнения (1) можно определить, применяя способ Чебышева.

Пусть функции $\varphi_{g_1/g_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)})$ являются ортогональными функциями от $\xi_{1(j_1)}$ и $\xi_{2(j_2)}$, т. е. удовлетворяют условиям

$$\sum_{j_1=1}^{h_1} \sum_{j_2=1}^{h_2} p_{j_1/j_2} \varphi_{f_1/f_2} (\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}) \varphi_{g_1/g_2} (\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}) \begin{cases} =0, & \text{если } f_1 \neq g_1 \\ & \text{или } f_2 \neq g_2 \\ \neq 0, & \text{если } f_1 = g_1 \\ & \text{и } f_2 = g_2 \end{cases} \tag{2}$$

и связаны с предшествующими им функциями $\varphi_{f_1/f_1}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)})$ равенством

$$\varphi_{g_1/g_2} (\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}) = \xi_{1(j_1)}^{g_1} \xi_{2(j_2)}^{g_2} - \sum_{f_1} \sum_{f_2} s^{(g_1, g_2)}_{f_1/f_2} \varphi_{1/f_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}), \tag{3}$$

причем

$$\varphi_{0/0} (\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}) = 1. \tag{4}$$

2. Для определения коэффициентов $s_{f_1/f_2}^{(g_1,g_2)}$ умножим (3) на $\varphi_{f_1/f_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)})$ и просуммируем по всем значениям j_1 и j_2. Принимая во внимание (2), получим

$$s_{f_1/f_2}^{(g_1,g_2)} = \frac{\sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1/j_2} \xi_{1(j_1)}^{g_1} \xi_{2(j_2)}^{g_2} \varphi_{f_1/f_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)})}{\sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1/j_2} [\varphi_{f_1/f_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)})]^2}, \tag{5}$$

причем, в силу (3) и (2),

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1/j_2} [\varphi_{f_1/f_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)})]^2 = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1/j_2} \xi_{1(j_1)}^{f_1} \xi_{2(j_2)}^{f_2} \varphi_{f_1/f_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}). \tag{6}$$

Введем теперь обозначение

$$Q^{(g_1,g_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & r_{1/1/0} & 1 & 1 & \ldots & r_{0/g_2/0} \\ 0 & 1 & r_{1/1/0} & r_{2/1/0} & r_{3/0/0} & r_{1/2/0} & \ldots & r_{1/g_2/0} \\ 0 & r_{1/1/0} & 1 & r_{1/2/0} & r_{2/1/0} & r_{0/3/0} & \ldots & r_{0/g_2+1/0} \\ r_{1/1} & r_{2/1/0} & r_{1/2/0} & r_{2/2/0} & r_{3/1/0} & r_{1/3/0} & \ldots & r_{1/g_2+1/0} \\ 1 & r_{3/0/0} & r_{2/1/0} & r_{3/1/0} & r_{4/0/0} & r_{2/2/0} & \ldots & r_{2/g_2/0} \\ 1 & r_{1/2/0} & r_{0/3/0} & r_{1/3/0} & r_{2/2/0} & r_{0/4/0} & \ldots & r_{0/g_2+2/0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{0/g_2/0} & r_{1/g_2/0} & r_{0/g_2+1/0} & r_{1/g_2+1/0} & r_{2/g_2/0} & r_{0/g_2+2/0} & \ldots & r_{0/2g_2/0} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где $r_{g_1/g_2/0}$ есть основной момент произведения двух статистических величин X_1 и X_2:

$$r_{g_1/g_2/0} = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1/j_2} \xi_{1(j_1)}^{g_1} \xi_{2(j_2)}^{g_2}. \tag{8}$$

Подставляя значения коэффициентов $s_{f_1/f_2}^{(g_1,g_2)}$ в (3) и пользуясь обозначением (7), получим

$$\varphi_{g_1/g_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}) = \frac{Q_{g_1,g_2}^{(g_1,g_2)*}}{Q^{(g_1,g_2)-1}}, \tag{9}$$

где $Q_{g_1,g_2}^{(g_1,g_2)*}$ представляет определитель, составленный из определителя (7) путем замены в нем элементов последнего столбца величинами

$$1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2, \xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^{g_2}, \tag{10}$$

а $Q^{(g_1,g_2)-1}$ представляет определитель порядка на единицу ниже чем (7).

3. Коэффициенты a_{g_1/g_2} уравнения (1) определяются при условии, что сумма

$$\sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{j_1/j_2} \left\{ r_{(j_1)/(j_2)/1} - \sum_{g_1=0}^{h_1} \sum_{g_2=0}^{h_2} a_{g_1/g_2} \varphi_{g_1/g_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)}) \right\}^2 \tag{11}$$

будет минимумом.

Приравнивая нулю первые производные этого выражения по a_{g_1/g_2} и решая полученные таким образом уравнения, находим

$$a_{g_1/g_2} = \frac{Q_{g_1 \cdot g_2}^{(g_1,g_2)}}{Q^{(g_1,g_2)}}, \tag{12}$$

где $Q^{(g_1,g_2)}_{g_1,g_2}$ представляет определитель, составленный из определителя (7) путем замены в нем элементов последнего столбца величинами

$$0,\ r_{1/0/1},\ r_{0/1/1},\ r_{1/1/1},\ r_{2/0/1},\ r_{0/2/1},\ \ldots,\ r_{0/g_2/1}, \tag{13}$$

причем

$$r_{g_1/g_2/1}=\sum_{j_1=1}^{k_1}\sum_{j_2=1}^{k_2}\sum_{j_3=1}^{k_3} p_{j_1/j_2/j_3}\xi^{g_1}_{1(j_1)}\xi^{g_2}_{2(j_2)}\xi_{3(j_3)}. \tag{14}$$

4. Определив коэффициенты a_{g_1/g_2} и функции $\varphi_{g_1/g_2}(\xi_{1(j_1)}, \xi_{2(j_2)})$, мы можем множественное нелинейное корреляционное уравнение (1) представить в следующем виде:

$$r^{(h_1,h_2)}_{(j_1)/(j_2)/1}=\sum_{g_1=1}^{h_1}\sum_{g_2=1}^{h_2}\frac{Q^{(g_1,g_2)}_{g_1,g_2}\,Q^{(g_1,g_2)*}_{g_1,g_2}}{Q^{(g_1,g_2)-1}\,Q^{(g_1,g_2)}}. \tag{15}$$

В частности, останавливаясь на первом члене выражения (15), получим обыкновенное линейное корреляционное уравнение, выражающее связь между двумя статистическими величинами X_3 и X_1:

$$r_{(j_1)/\cdot/1}=r_{1/0/1}\xi_{1(j_1)}. \tag{16}$$

Присоединяя второй член выражения (15), получим множественное линейное корреляционное уравнение, выражающее связь между тремя статистическими величинами X_3, X_1 и X_2:

$$r_{(j_1)/(j_2)/1}=r_{1/0/1}\xi_{1(j_1)}+\frac{r_{0/1/1}-r_{1/1/0}\,r_{1/0/1}}{1-r^2_{1/1/0}}\left(\xi_{2(j_2)}-r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right), \tag{17}$$

или

$$r_{(j_1)/(j_2)/1}=\frac{r_{1/0/1}-r_{1/1/0}\,r_{0/1/1}}{1-r^2_{1/1/0}}\,\xi_{1(j_1)}+\frac{r_{0/1/1}-r_{1/1/0}\,r_{1/0/1}}{1-r^2_{1/1/0}}\,\xi_{2(j_2)}. \tag{18}$$

Если после этого присоединим третий член выражения (15), содержащий произведение $\xi_1\xi_2$, то получим множественное корреляционное уравнение гиперболического вида:

$$r_{(j_1)/(j_2)/1}=r_{1/0/1}\xi_{1(j_1)}+\frac{r_{0/1/1}-r_{1/1/0}r_{1/0/1}}{1-r^2_{1/1/0}}\left(\xi_{2(j_2)}-r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right)+$$

$$+\frac{\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&r_{1/1/0}&r_{1/0/1}\\0&r_{1/1/0}&1&r_{0/1/1}\\r_{1/1/0}&r_{2/1/0}&r_{1/2/0}&r_{1/1/1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&0&0&r_{1/1/0}\\0&1&r_{1/1/0}&r_{2/1/0}\\0&r_{1/1/0}&1&r_{1/2/0}\\r_{1/1/0}&r_{2/1/0}&r_{1/2/0}&r_{2/2/0}\end{vmatrix}}\left(\xi_{1(j_1)}\xi_{2(j_2)}-\frac{r_{1/2/0}-r_{1/1/0}r_{2/1/0}}{1-r^2_{1/1/0}}\,\xi_{2(j_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{r_{2/1/0}-r_{1/1/0}r_{1/2/0}}{1-r^2_{1/1/0}}\,\xi_{1(j_1)}-r_{1/1/0}\right). \tag{19}$$

5. Найдем теперь основную ошибку $\frac{c_{3.12}^{(h_1,h_2)^2}}{c_3^2}$ множественного нелинейного корреляционного уравнения (15), равную минимальному значению суммы

$$w_{h_1,h_2} = \sum_{j=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} p_{j_1/j_2/j_3} \left(\xi_{3(j_3)} - r^{(h_1,h_2)}_{(j_1)/(j_2)/1}\right)^2. \tag{20}$$

Для определения коэффициентов многочлена (1), при которых сумма (20) будет иметь минимальное значение, необходимо положить

$$\frac{\partial w_{h_1,h_2}}{\partial a_{g_1/g_2}} = 0 \qquad (g_1 = \overline{0, h_1}, \quad g_2 = \overline{0, h_2}). \tag{21}$$

Решая уравнения (21), получим те же самые значения коэффициентов a_{g_1/g_2}, какие были найдены выше (12).

Чтобы выразить основную ошибку корреляционного уравнения (15) при помощи основных моментов (8) и (14), рассмотрим следующую функцию от коэффициентов a_{g_1/g_2} и некоторой переменной t:

$$\varphi(t, a_{g_1/g_2}) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3-1}^{k_3} p_{j_1/j_2/j_3} \left(t\xi_{3(j_3)} - r^{(h_1,h_2)}_{(j_1)/(j_2)/1}\right)^2. \tag{22}$$

Так как функция (22) является однородной относительно t и a_{g_1/g_2}, причем степень однородности равна 2, то, применяя теорему Эйлера, получим

$$2\varphi(t, a_{g_1/g_2}) = \frac{\partial\varphi(t, a_{g_1/g_2})}{\partial t}\, t + \sum_{g_1=0}^{h_1} \sum_{g_2=0}^{h_2} \frac{\partial\varphi(t, a_{g_1/g_2})}{\partial a_{g_1/g_2}}\, a_{g_1/g_2} \tag{23}$$

для всех значений t и a_{g_1/g_2}.

Полагая $t = 1$, имеем

$$\varphi(1, a_{g_1/g_2}) = w_{h_1,h_2}. \tag{24}$$

Принимая, далее, во внимание (21), находим, что при $t = 1$ уравнение (23) сводится к следующему:

$$2w_{h_1,h_2} = \left(\frac{\partial\varphi(t, a_{g_1/g_2})}{\partial t}\, t\right)_{t=1} =$$
$$= 2\sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \sum_{j_3=1}^{k_3} p_{j_1/j_2/j}\; \xi_{3(j_3)} \left(\xi_{3(j_3)} - r^{(h_1,h_2)}_{(j_1)/(j_2)/1}\right). \tag{25}$$

Суммируя по всем значениям j_1, j_2, j_3 и замечая, что при значениях a_{g_1/g_2}, определенных выше (12), величина w_{h_1,h_2} достигает своего минимального значения, т. е. представляет основную ошибку множественного нелинейного корреляционного уравнения (15), находим

$$\frac{\sigma_{3.12}^{(h_1,h_2)2}}{\sigma_3^2} = 1 - \sum_{g_1=1}^{h_1} \sum_{g_2=1}^{h_2} \frac{Q_{g_1,g_2}^{(g_1,g_2)2}}{Q^{(g_1,g_2)-1}\,Q^{(g_1,g_2)}}. \tag{26}$$

В частности, основная ошибка обыкновенного линейного корреляционного уравнения (16) равна

$$\frac{\sigma_{3.1}^2}{\sigma_3^2} = 1 - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_{1/0/1} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 1 - r_{1/0/1}^2. \tag{27}$$

Основная ошибка множественного линейного корреляционного уравнения (18) равна

$$\frac{\sigma_{3.12}^2}{\sigma_3^2} = 1 - r_{1/0/1}^2 - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{1/0/1} \\ 0 & r_{1/1/0} & r_{0/1/1} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{1/1/0} \\ 0 & r_{1/1/0} & 1 \end{vmatrix}} = 1 - r_{1/0/1}^2 - \frac{(r_{0/1/1} - r_{1/1/0} r_{1/0/1})^2}{- r_{1/1/0}^2} =$$

$$= 1 - \frac{r_{1/0/1}^2 + r_{0/1/1}^2 - 2 r_{1/1/0} r_{1/0/1} r_{0/1/1}}{1 - r_{1/1/0}^2}. \tag{28}$$

Подобным же образом основная ошибка множественного корреляционного уравнения гиперболического вида (19) равна

$$\frac{\sigma_{3.12}^2}{\sigma_3^2} = 1 - r_{1/0/1}^2 - \frac{(r_{0/1/1} - \;\; {}_{1/1/0} r_{1/0/1})^2}{1 - r_{1/1/0}^2} -$$

$$- \frac{[(1 - r_{1/1/0}^2)(r_{1/1/1} - r_{2/1/0} r_{1/0/1}) - (r_{1/2/0} - r_{2/1/0} r_{1/1/0})(r_{0/1/1} - r_{1/1/0} r_{1/0/1})]^2}{(1 - r_{1/1/0}^2)[(1 - r_{1/1/0}^2)(r_{2/2/0} - r_{2/1/0}^2 - r_{1/1/0}^2) - (r_{1/2/0} - r_{2/1/0} r_{1/1/0})^2]}. \tag{29}$$

6. Для упрощения вычислений корреляционного уравнения (15) выразим его в ином виде. С этой целью введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_1 = 1 - r_{1/1/0}^2, && \gamma_6 = r_{4/0/0} - r_{3/0/0}^2 - 1,\\
&\gamma_2 = r_{1/2/0} - r_{2/1/0}\, r_{1/1/0}, && \gamma_7 = r_{0/3/0} - r_{1/2/0}\, r_{1/1/0},\\
&\gamma_3 = r_{2/2/0} - r_{2/1/0}^2 - r_{1/1/0}^2, && \gamma_8 = r_{1/3/0} - r_{2/1/0}\, r_{1/2/0} - r_{1/1/0},\\
&\gamma_4 = r_{2/1/0} - r_{1/1/0}\, r_{3/0/0}, && \gamma_9 = r_{2/2/0} - r_{1/2/0}\, r_{3/0/0} - 1,\\
&\gamma_5 = r_{3/1/0} - r_{2/1/0}\, r_{3/0/0} - r_{1/1/0}, && \gamma_{10} = r_{0/4/0} - r_{1/2/0}^2 - 1,
\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1 &= r_{0/1/1} - r_{1/1/0}\, r_{1/0/1},\\
\delta_2 &= r_{1/1/1} - r_{2/1/0}\, r_{1/0/1},\\
\delta_3 &= r_{2/0/1} - r_{3/0/0}\, r_{1/0/1},\\
\delta_4 &= r_{0/2/1} - r_{1/2/0}\, r_{1/0/1},
\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

$$\left.\begin{aligned}
&c_1 = \gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2, && c_4 = \gamma_1\gamma_8 - \gamma_2\gamma_7,\\
&c_2 = \gamma_1\gamma_5 - \gamma_2\gamma_4, && c_5 = \gamma_1\gamma_9 - \gamma_4\gamma_7,\\
&c_3 = \gamma_1\gamma_6 - \gamma_4^2, && c_6 = \gamma_1\gamma_{10} - \gamma_7^2,
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

$$\left.\begin{aligned}
d_1 &= \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1,\\
d_2 &= \gamma_1\delta_3 - \gamma_4\delta_1,\\
d_3 &= \gamma_1\delta_4 - \gamma_7\delta_1.
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Применяя эти обозначения и ограничиваясь первыми пятью членами выражения (15) для случаев, когда $h_1 \leqslant 2$, $h_2 \leqslant 2$, мы можем множественное нелинейное корреляционное уравнение привести к виду:

$$\begin{aligned}
r_{(j_1)/(j_2)/1} &= r_{1/0/1}\xi_{1(j_1)} + \frac{\delta_1}{\gamma_1}\left(\xi_{2(j_2)} - r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right) + \\
&+ \frac{d_1}{c_1}\left[\xi_{1(j_1)}\xi_{2(j_2)} - r_{2/1/0}\xi_{1(j_1)} - r_{1/1/0} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\xi_{2(j_2)} - r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right)\right] + \\
&+ \frac{\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \Big\{\xi_{1(j_1)}^2 - r_{3/0/0}\xi_{1(j_1)} - 1 - \frac{\gamma_4}{\gamma_1}\left(\xi_{2(j_2)} - r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right) - \\
&- \frac{c_2}{c_1}\left[\xi_{1(j_1)}\xi_{2(j_2)} - r_{2/1/0}\xi_{1(j_1)} - r_{1/1/0} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\xi_{2(j_2)} - r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right)\right]\Big\} + \\
&+ \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & d_1 \\ c_2 & c_3 & d_2 \\ c_4 & c_5 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}} \Big(\xi_{2(j_2)}^2 - r_{1/2/0}\xi_{1(j_1)} - 1 - \frac{\gamma_7}{\gamma_1}\left(\xi_{2(j_2)} - r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right) - \\
&- \frac{c_4}{c_1}\left[\xi_{1(j_1)}\xi_{2(j_2)} - r_{2/1/0}\xi_{1(j_1)} - r_{1/1/0} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\xi_{2(j_2)} - r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right)\right] - \\
&- \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \Big\{\xi_{1(j_1)}^2 - r_{3/0/0}\xi_{1(j_1)} - 1 - \frac{\gamma_4}{\gamma_1}\left(\xi_{2(j_2)} - r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right) - \\
&- \frac{c_2}{c_1}\left[\xi_{1(j_1)}\xi_{2(j_2)} - r_{2/1/0}\xi_{1(j_1)} - r_{1/1/0} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\xi_{2(j_2)} - r_{1/1/0}\xi_{1(j_1)}\right)\right]\Big\}\Big) \qquad (34)
\end{aligned}$$

с основной ошибкой

$$\frac{c_{3.12}^2}{c_3^2} = 1 - r_{1/0/1}^2 - \frac{\mathring{\delta}_1^2}{\gamma_1} - \frac{d_1^2}{\gamma_1 c_1} - \frac{\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}^2}{c_1 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & d_1 \\ c_2 & c_3 & d_2 \\ c_4 & c_5 & d_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}}. \quad (35)$$

Ленинградский гос. университет.

Поступило
15. II. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Романовский В. И., Новый вывод метода параболического интерполирования Чебышева, Вестн. ирригации (1926), № 1, стр. 29—51.

[2] Tchouproff A. A., The mathematical theory of the statistical methods emloyed in the study of correlation in the case of three variables. Translated by L. Isserlis. Trans. of the Cambr. Phil. Soc., vol. XXVIII, № XII, 1928, pp. 337—382.

[3] Митропольский А. К., Об установлении корреляционных уравнений по способу Чебышева, Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем. (1937), № 1, стр. 125—134.

A. MITROPOLSKY. ON THE MULTIPLE NON-LINEAR CORRELATION EQUATIONS

SUMMARY

In the present paper the method of Tchebycheff is applied to the representation of the multiple non-linear correlation equations by the polynomials.

The multiple non-linear correlation equation expressing the dependence of the statistical variable X_3 on the statistical variables X_1 and X_2 is of the form

$$r_{(j_1)/(j_2)/1}^{(h_1,h_2)} = \sum_{g_1=1}^{h_1} \sum_{g_2=1}^{h_2} \frac{Q_{g_1,g_2}^{(g_1,g_2)} Q_{g_1,g_2}^{(g_1,g_2)^*}}{Q^{(g_1,g_2)-1} Q^{(g_1,g_2)}}$$

with the standard error

$$\frac{c_{3.12}^{(h_1,h_2)2}}{c_3^2} = 1 - \sum_{g_1=1}^{h_1} \sum_{g_2=1}^{h_2} \frac{Q_{g_1,g_2}^{(g_1,g_2)2}}{Q^{(g_1,g_2)-1} Q^{(g_1,g_2)}},$$

where $r_{(j_1)/(j_2)/1}^{(h_1,h_2)}$ is the conditional standard moment of the statistical variable X_3 under the assumption that the statistical variables X_1 and X_2 assume respectively the values $\xi_{1(j_1)}$ and $\xi_{2(j_2)}$; $Q^{(g_1,g_2)}$ is the determinant (7); $Q_{g_1,g_2}^{(g_1,g_2)}$ and $Q_{g_1,g_2}^{(g_1,g_2)^*}$ are the determinants formed from the

determinant (7) by replacing the elements of the last column by (13) and (10) respectively; finally, $Q^{(g_1, g_2)-1}$ is the determinant obtained from the determinant (7) by omitting the last row and the last column.

In the last section of the paper are given formulae convenient for computations.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

А. А. ЛЯПУНОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ δs-ОПЕРАЦИЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Выделяется класс δs-операций, относительно которых инвариантны некоторые семейства проективных множеств.

Рассмотрим классы множеств, получаемых следующим способом: A'_n суть проекции униформных CA_{n-1} (1), CA'_n суть дополнения к A'_n, B'_n суть множества, являющиеся одновременно A'_n и CA'_n-множествами. Легко видеть, что A'_n совпадают с совокупностью взаимно однозначных и непрерывных образов CA_{n-1}. Недавно М. Кондо (2) показал, опираясь на процесс указания точки в CA-множестве, данный П. С. Новиковым (3), что классы A'_2, CA'_2 и B'_2 соответственно совпадают с классами A_2, CA_2 и B_2. Однако для высших классов аналогичного результата лу ь не удается, в виду того что мы не умеем указать точки даже в произвольном непустом CA_2-множестве.

В виду этого представляется интересным изучить некоторые свойства множеств A'_n, CA'_n и B'_n. Повторяя рассуждение В. К. Серпинского (1), можно установить, что семейство B'_n множеств инвариантно по отношению к операциям счетной суммы и счетного пересечения.

В настоящей статье мы имеем в виду выделить класс δs-операций (4), относительно которых семейство B'_n инвариантно, и дать некоторые приложения этого результата.

Для случая A_n-множеств аналогичная теорема установлена Е. М. Левенсоном и Л. В. Канторовичем (4).

Если N есть некоторое множество точек бэровского пространства, то δs-операцией с базой N над системой множеств, взятых в определенном порядке

$$\mathscr{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}, \qquad (1)$$

называется операция

$$\Phi_N = \sum_{\nu \subset N} \prod_{n_k \subset \nu} E_{n_k}.$$

Мы напомним два определения, данные Канторовичем и Левенсоном.

База называется полной (complete) и обозначается $\tilde{N}$, если в нее нельзя прибавить ни одного элемента бэровского пространства так, чтобы, какова бы ни была система (1), результат операции остался неизменным. Канторович и Левенсон показали, что для всякой базы можно построить эквивалентную ей базу $\tilde{N}$. Это делается следующим образом: база $\tilde{N}$ состоит из всех тех элементов пространства Бэра, из знаков которых при помощи вычеркиваний, перестановок и повторений можно получить элемент первоначальной базы.

База называется приведенной полной (reduced complete) и обозначается $\check{N}$, если она состоит из всех элементов

$$\nu \equiv (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$$

некоторой полной базы таких, что

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

или

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k = n_{k+1} = \ldots = n_{k+m} = \ldots$$

Приведенная полная база $\check{N}$ имеет следующее очевидное свойство:

Пусть x есть некоторая точка. Рассмотрим совокупность всех множеств последовательности (1), которые содержат точку x. Пусть это будут

$$E_{n_1(x)}, E_{n_2(x)}, \ldots, E_{n_k(x)}, \ldots, \tag{2}$$

причем взаимное расположение этих множеств в строчке (2) будем считать таким же, как и в строчке (1). Выпишем теперь их номера в возрастающем порядке, причем, если этих множеств только конечное число, то последний из номеров повторим бесконечное число раз. Пусть это будет

$$n_1(x),\ n_2(x), \ldots, n_k(x), \ldots$$

Тогда точка x входит в результат δs-операций в том и только в том случае, если элемент бэровского пространства $\nu \equiv (n_1(x), n_2(x), \ldots$ $\ldots, n_k(x), \ldots)$ входит в $\check{N}$.

ТЕОРЕМА. *Класс B'_n инвариантен относительно всякой δs-операции, для которой $\check{N}$ входит в B'_n.*

Доказательство. Пусть M есть некоторое тело множеств бэровского пространства J_x и

$$\mathscr{E} \equiv \{E_n\}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

есть некоторая счетная система множеств, входящих в M. Мы построим следующую функцию:

$$y_{\mathscr{E}}(x) = (n_1(x),\ n_2(x),\ \ldots,\ n_k(x),\ \ldots),$$

где числа $n_k(x)$ имеют тот же смысл, что и выше. Функция $y_{\mathscr{E}}(x)$ определена на множестве $\sum\limits_n E_n$, которое очевидно входит в M. Обозначим через $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ интервал Бэра, соответствующий кортежу $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Мы покажем, что лебеговские множества

$$E\,[y_{\mathscr{E}}(x) \subset \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}]$$

всегда входят в M. В самом деле, если

$$\left.\begin{array}{c} n_1 < n_2 < \ldots < n_k \\ \text{или} \\ n_1 < n_2 < \ldots < n_i = n_{i+1} = \ldots = n_k, \end{array}\right\} \qquad (A)$$

то

$$E\,[y_{\mathscr{E}}(x) \subset \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}] = \prod_{i=1}^{i-k} E_{n_i} - \sum_{\substack{q \neq n_1, n_2, \ldots, n_{k-1} \\ q < n_k}} E_q. \qquad (3)$$

Если же ни одно из соотношений (A) не выполнено, то

$$E\,[y_{\mathscr{E}}(x) \subset \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}] = 0. \qquad (4)$$

Из формул (3) и (4) вытекает справедливость нашего утверждения.

Обозначим через $q_{\mathscr{E}}$ множество всех точек $(x, y_{\mathscr{E}}(x))$ пространства

$$J_x \times J_y = J_{xy}.$$

Из того, что семейство B'_n-множеств инвариантно относительно счетных сумм и пересечений и J_{xy} гомеоморфно пространству Бэра, следует что если за M взять семейство B'_n-множеств, то и $q_{\mathscr{E}}$ войдет в это семейство. Очевидно $q_{\mathscr{E}}$ униформно относительно J_y и его проекция на J_x есть $\sum\limits_n E_n$. Пусть теперь $\check{N}$ есть некоторая приведенная полная база δs-операций ($\check{N} \subset J_y$). Тогда

$$\Phi_{\check{N}}(\mathscr{E}) = \Pi_x\,[q_{\mathscr{E}} \cdot (J_x \times \check{N})], \qquad (5)$$

где через $\Pi_x H$ обозначается проекция множества H на J_x.

1. В самом деле, пусть

$$x \subset \Phi_{\check{N}}(\mathscr{E}).$$

Тогда, в силу того что $\check{N}$ есть приведенная полная база,

$$\nu(x) = (n_1(x),\ n_2(x),\ \ldots,\ n_k(x),\ \ldots)$$

есть элемент множества $\check{N}$. Но

$$\nu(x) = y_{\mathscr{E}}(x),$$

поэтому точка

$$(x,\ \nu(x)) \subset q_{\mathscr{E}}.$$

Очевидно, далее, что

$$(x,\ \nu(x)) \subset J_x \times \check{N}.$$

Следовательно,

$$x \subset \Pi_x [q_{\mathscr{E}} \cdot (J_x \times \check{N})];$$

т. е.

$$\Phi_{\check{N}}(\mathscr{E}) \subset \Pi_x [q_{\mathscr{E}} \cdot (J_x \times \check{N})].$$

2. Пусть теперь

$$x \subset \Pi_x [q_{\mathscr{E}} \cdot (J_x \times \check{N})].$$

Тогда во всяком случае

$$(x,\ y_{\mathscr{E}}(x)) \subset J_x \times \check{N},$$

или

$$y_{\mathscr{E}}(x) \subset \check{N}. \qquad \text{(B)}$$

Но $x \subset E_{n_k}$, если n_k есть один из знаков функции $y_{\mathscr{E}}(x)$. Поэтому

$$x \subset \prod_k E_{n_k},$$

где n_k пробегает все знаки последовательности $y_{\mathscr{E}}(x)$.

В силу (B)

$$x \subset \sum_{\nu \subset \check{N}} \prod_{n_k \subset \nu} E_{n_k},$$

т. е.

$$\Pi_x (q_{\mathscr{E}} \cdot (J_x \times \check{N})) \subset \Phi_{\check{N}}(\mathscr{E}),$$

что и доказывает справедливость формулы (5).

Из формулы (2) легко получить доказательство теоремы. В самом деле, множества

$$q_{\mathscr{E}} \cdot [J_x \times \check{N}] \ \text{ и } \ q_{\mathscr{E}} \cdot [J_x \times CN]$$

являются оба B'_n-множествами, униформными относительно J_y. Проекция каждого из них есть A'_n. Однако функция $y_{\mathscr{E}}(x)$ была определена для всех точек множества $\sum_n E_n$. Поэтому сумма проекций этих множеств на J_x есть некоторое B'_n. Следовательно, каждое из них есть B'_n. Этим теорема доказана.

Для случая (A)-операции $\check{N}$ есть A-множество. Для случая $R(CA)$-операции, т. е. R-операции над δs-операцией, эквивалентной CA-операции (5), $\check{N}$ во всяком случае есть A_2-множество. Оба эти обстоятельства установлены Левенсоном и Канторовичем. Поэтому все семейства B'_n, $n \geqslant 3$, инвариантны относительно A и $R(CA)$-операций. В частности, мной было показано(6), что B-тело, построенное на A_2- и CA_2-множествах, входит в класс B'_3 множеств. Теперь можно утверждать, что минимальная система множеств, инвариантная относительно $R(CA)$-операции и содержащая все A_2- и CA_2-множества, также входит в класс B'_3 множеств.

Тем же методом легко показать, что если $\check{N}$ есть CA-множество, то $\Phi_{\check{N}}(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ есть система B-множеств, обязательно является CA-множеством.

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР.

Поступило 23. V. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1 Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930, ch. V.
2 Kondo M., Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques, Jap. Journal of Math., vol. XV, № 3 (1938).
3 Lusin N. et Novikoff P., Choix effectif, Fund. Mat., XXV (1935).
4 Kantorovich L. and Levenson E., Analytical operations and projectif sets, I., Fund. Mat., XVIII (1932).
5 Kantorovich L. and Levenson E., idem, II, Fund. Mat., XX (1933).
6 Ляпунов А., Об униформизации аналитических дополнений, Матем. сб., 3 (45): 1 (1938).

A. LIAPOUNOFF. SUR UNE PROPRIÉTÉ DES δs-OPÉRATIONS

RÉSUMÉ

Nous appelons ensembles A'_n les projections des ensembles CA_{n-1} uniformes. Les complémentaires des ensembles A'_n sont des ensembles CA'_n; les ensembles qui sont en même temps des ensembles A'_n et CA'_n sont des ensembles B'.

Nous désignons par $\check{N}$ la base réduite et complète (the reduced complete base) définie par L. Kantorovich et E. Levenson. Nous démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME. *La famille des ensembles B'_n est invariante par rapport à chaque δs-opération de Hausdorf et Kolmogoroff, dont la base $\check{N}$ est un ensemble B'_n.*

Il suit de ce théorème que la plus petite famille d'ensembles, qui est invariante par rapport aux opérations A et C ou, plus généralement, par rapport à l'opération $R(CA)$ et qui contient tous les ensembles A_2 et CA_2 est contenue dans la famille des ensembles B_3'.

Il est aisé de demontrer par la même méthode que si la base $\check{N}$ est un complémentaire analytique et $\{E_n\}$ est une famille d'ensembles mesurables B, l'ensemble $\Phi_{\check{N}}(\{E_n\})$ est de même un complémentaire analytique.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Н. С. СМИРНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе изучается при помощи операции свертывания вопрос о решении интегральных и интегродифференциальных уравнений, ядра которых представляют собою линейную функцию их аргументов.

В настоящей статье рассматривается класс интегральных и интегродифференциальных уравнений, ядра которых представляют собою линейную функцию их аргументов. К уравнениям с ядрами такого типа неоднократно применялся интеграл Фурье ([1, 2, 3]). Ряды Фурье здесь применяются впервые.

§ 1

Многочисленные применения интеграла Фурье к решению функциональных уравнений основываются на понятии о «свертывании». Свертыванием двух функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, суммируемых со своим квадратом на всей вещественной оси x, называется интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-\xi) F_2(\xi)\, d\xi \equiv F_1(x) * F_2(x).$$

Замечательным свойством свертывания является то, что преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} \varphi(x)\, dx \equiv \mathfrak{F}\{\varphi\},$$

при весьма общих предположениях о F_1 и F_2 ([4]) дает, если мы применим это преобразование к свертыванию $F_1(x) * F_2(x)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-\xi) F_2(\xi)\, d\xi\, dx \equiv \mathfrak{F}\{F_1(x) * F_2(x)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\xi} F_1(\xi)\, d\xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\xi} F_2(\xi)\, d\xi = \mathfrak{F}\{F_1\} \cdot \mathfrak{F}\{F_2\}.$$

В качестве примера применения свертывания приведу решение функционального уравнения (интегрального уравнения первого рода)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi)\,U(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

где $f(x)$ — заданная функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < M, \quad M=\text{const}, \tag{2}$$

$K(x-\xi)$ — ядро интегрального уравнения (1), причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(\omega)|^2\,d\omega < M_1, \quad M_1=\text{const}. \tag{3}$$

Поставим себе задачу отыскать функцию $U(\xi)$, о которой будем предполагать, что она удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(\xi)|^2\,d\xi < M_2, \quad M_2=\text{const}. \tag{4}$$

О функциях f, K, U, удовлетворяющих условиям (2), (3) и (4), будем говорить, что они принадлежат L^2, т. е.

$$f\in L^2,\ K\in L^2,\ U\in L^2.$$

Легко видеть из (1), что

$$f(x)=K(x)*U(x)\in L^2.$$

Предположим также, что

$$\varphi(z)\equiv\mathfrak{F}\{f\}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f(x)\,dx\in L^1, \tag{5}$$

т. е. что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f \quad dx\right| dz \tag{6}$$

конечен.

Теперь можно переписать (1), сделав над ним преобразование Фурье, так:

$$\mathfrak{F}\{f\}=\mathfrak{F}\{K(x)*U(x)\}. \tag{7}$$

Делая обратное преобразование Фурье *

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\varphi\}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixz}\,\varphi(z)\,dz \tag{8}$$

над обеими частями (7), получим

$$f(x)=K(x)*U(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixz}\,\varphi(z)\,dz, \tag{9}$$

причем интеграл в правой части абсолютно сходится, так как, по предположению (6), $\varphi(z)\in L^1$.

* Равенства (5) и (8) понимаются как равенства, справедливые почти везде, т. е. они могут быть несправедливы на множестве меры нуль.

Предположение (9) будет доказано, как только мы докажем, что $U \in L^2$. Обозначим $\mathfrak{F}\{K\} = k(z) \in L^2$, $\mathfrak{F}\{U\} = u(z) \in L^2$. Непосредственной подстановкой легко доказывается равенство

$$K(x) * U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\ \ } k(z)\, u(z)\, dz, \tag{10}$$

причем, так как $k \in L^2$ и $u \in L^2$, то $k(z) \cdot u(z) \in L^1$, почему последний интеграл абсолютно сходится.

Приравнивая (9) и (10), по хорошо известной теореме об единственности преобразования абсолютно сходящегося интеграла Фурье, получим

$$\varphi(z) = k(z) \cdot u(z),$$

т. е.

$$\mathfrak{F}\{f\} = \mathfrak{F}\{K\} \cdot \mathfrak{F}\{U\}. \tag{11}$$

Функции f и K даны, следовательно известны и величины $\mathfrak{F}\{f\}$ и $\mathfrak{F}\{K\}$. Из (11) определяем неизвестную величину $\mathfrak{F}\{U\}$:

$$\mathfrak{F}\{U\} = \frac{\mathfrak{F}\{f\}}{\mathfrak{F}\{K\}}.$$

Для того чтобы $U(x) \in L^2$, достаточно, чтобы $\mathfrak{F}\{U\} \in L^2$, т. е. чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\mathfrak{F}\{f\}}{\mathfrak{F}\{K\}} \right|^2 dz$$

был конечен; другими словами, необходимо, чтобы

$$\frac{\mathfrak{F}\{f\}}{\mathfrak{F}\{K\}} \in L^2. \tag{12}$$

Таким образом имеем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Интегральное уравнение* (1), *где* $f \in L^2$ *и* $K \in L^2$, *имеет суммируемое со своим квадратом решение, если* $\mathfrak{F}\{f\} \in L^1$ *и* $\dfrac{\mathfrak{F}\{f\}}{\mathfrak{F}\{K\}} \in L^2$. *Это решение дается формулой*

$$U(x) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{\mathfrak{F}\{f\}}{\mathfrak{F}\{K\}}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c^{\quad z} \frac{\mathfrak{F}\{f\}}{\mathfrak{F}\{K\}}\, dz. \tag{13}$$

Эта формула, при более жестких условиях, была получена автором еще в 1934 г. и была доложена 2-му Всесоюзному съезду математиков ([3]). Замечу, что условие (12) является аналогом условия Пикара существования решения у интегрального уравнения первого рода.

§ 2

Аналогично понятию свертывания, определенному для функций, принадлежащих $L^2(-\infty, \infty)$, можно ввести понятие о свертывании для функций, определенных на конечном отрезке. Для определенности рассмотрим отрезок (0, 1).

Определим свертывание так:

$$F_1(x) * F_2(x) \equiv \int_0^1 F_1(|x-\xi|) F_2(\xi) d\xi \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{14}$$

Здесь $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции вещественного переменного x, $0 \leqslant x \leqslant 1$ вещественные или комплексные, удовлетворяющие условию, что интегралы

$$\int_0^1 |F_1(\omega)|^2 d\omega \quad \text{и} \quad \int_0^1 |F_2(\omega)|^2 d\omega$$

конечны; запишем это так:

$$F_1 \in L^2 \quad \text{и} \quad F_2 \in L^2.$$

Свертывание (14) обладает замечательным свойством, аналогичным ранее установленному понятию свертывания. Для того чтобы показать это свойство, введем еще следующее понятие: обозначим через $\mathfrak{F}_k\{F(x)\}$ преобразование

$$\mathfrak{F}_k\{F(x)\} \equiv \int_0^1 e^{-2\pi ixk} F(x)\, dx \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{15}$$

Приведем общеизвестные теоремы:

Теорема А. *Если $F(x) \in L^2$ и нам дана система равенств*

$$\mathfrak{F}_k\{F(x)\} = \int_0^1 e^{-2\pi ixk} F(x)\, dx \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то справедливо равенство

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}_k\{F(x)\}\, e^{2\pi ixk},$$

причем этот ряд сходится в среднем.

Теорема В. *Если $F(x) \in L^2$, то всегда имеет место равенство*

$$\int_0^1 F^2(x)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}_k^2\{F\}.$$

Докажем теперь основную теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если $F_1 \in L^2$, $F_2 \in L^2$ и $F_1 * F_2 \in L^2$, то*

$$\mathfrak{F}_m\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{F}_m\{F_1\} \cdot \mathfrak{F}_m\{F_2\} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Доказательство. Так как $F_1 * F_2 \in L^2$, то по теореме А имеем

$$F_1 * F_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}_k\{F_1 * F_2\}\, e^{\pi ixk}, \tag{16}$$

причем этот ряд сходится в среднем. С другой стороны, так как $F_2 \in L^2$, то опять-таки по теореме А имеем

$$F_2 = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}_l\{F_2\}\, e^{2\pi ixl}. \tag{17}$$

Кроме того, функцию $F_1(|x-\xi|)$ можно разложить в ряд Фурье, который сходится в среднем

$$F_1(|\omega|)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k\{F_1\}\,e^{2\pi i\omega k}. \tag{18}$$

Здесь

$$\mathfrak{F}_k\{F_1\}=\int_0^1 F_1(|\omega|)\,e^{-2\pi i\omega k}\,d\omega. \tag{19}$$

Умножением (18) на $e^{-2\pi il\omega}\,d\omega$ и интегрированием в пределах (0, 1) сразу же получаем (19) в силу ортогональности и нормированности функций $e^{2\pi ik\omega}$.

Подставляя в (18) $x-\xi$ вместо ω, получаем

$$F_1(|x-\xi|)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k\{F_1\}\,e^{2\pi ik(x-\xi)}. \tag{20}$$

Вставляя выражения (16), (17) и (20) в равенство

$$F_1(x)*F_2(x)=\int_0^1 F_1(x-\xi)\,F_2(\xi)\,d\xi,$$

получаем

$$F_1*F_2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k\{F_1*F_2\}\,e^{2\pi ikx}=$$

$$=\int_0^1\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k\{F_1\}\,e^{2\pi ik(x-\xi)}\cdot\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_l\{F_2\}\,e^{2\pi il\xi}\,d\xi.$$

Написанные здесь ряды сходятся в среднем, почему мы можем почленно интегрировать выражения, стоящие справа *, что дает

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k\{F_1*F_2\}\,e^{2\pi ikx}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k\{F_1\}\,\mathfrak{F}_l\{F_2\}\,e^{2\pi ikx}\int_0^1 e^{2\pi i\xi(l-k)}\,d\xi=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k\{F_1\}\cdot\mathfrak{F}_k\{F_2\}\,e^{2\pi ikx}.$$

Умножая левую и правую части равенства на $e^{-2\pi imx}\,dx$ и интегрируя в (0, 1), получаем

$$\mathfrak{F}_m\{F_1*F_2\}=\mathfrak{F}_m\{F_1\}\cdot\mathfrak{F}_m\{F_2\}\quad(m=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

что и требовалось доказать.

Теорему 2 следует положить в основу решения функциональных уравнений, ядра которых суть функции модуля разности аргументов. Разберем несколько важных приложений.

* Доказательство законности интегрирования почленно ряда, сходящегося в среднем, см., например, в книге И. И. Привалова ([5]).

§ 3. Решение интегральных уравнений первого рода с ядром $K(|x-\xi|)$

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$f(x)=\int_0^1 K(|x-\xi|)\,u(\xi)\,d\xi \quad (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{21}$$

Здесь $f(x)\in L^2$, $K\in L^2(0,1)$ — заданные функции, а $u(\xi)$ — искомая функция; для определенности, как и всюду, взяты пределы $(0, 1)$. Легко распространить этот же метод решения на уравнения типа

$$f(x)=\int_a^b K(|x-\xi|)\,u(\xi)\,d\xi \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Сразу видно, что равенство (21) можно переписать так:

$$f(x)=K*u,$$

и так как $f(x)\in L^2$, то $K*u\in L^2$, поэтому, предполагая (что обусловим ниже), что $u\in L^2$, имеем

$$\mathfrak{F}_k\{f\}=\mathfrak{F}_k\{K*u\}=\mathfrak{F}_k\{K\}\cdot\mathfrak{F}_k\{u\} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Величины $\mathfrak{F}_k\{f\}$ и $\mathfrak{F}_k\{K\}$ нам известны, откуда легко вычислить $\mathfrak{F}_k\{u\}$:

$$\mathfrak{F}_k\{u\}=\frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{22}$$

Теперь весьма легко доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Интегральное уравнение* (21), *у которого* $f\in L^2$, $K\in L^2$, *имеет решение, суммируемое со своим квадратом, если сходится ряд*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{F}_k^2\{f\}}{\mathfrak{F}_k^2\{K\}}. \tag{23}$$

Доказательство. Коэффициенты разложения функции $u(\xi)$ в ряд Фурье, очевидно, равны $\mathfrak{F}_k\{u\}$. Они даются равенствами (22).

Если сумма квадратов коэффициентов Фурье функции $u^*(\xi)$ сходится, т. е. если сходится ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k^2\{u^*\}$, то функция $u^*(\xi)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье

$$u^*(\xi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathfrak{F}_k\{u^*\}\,e^{2\pi ik\xi}.$$

Остается показать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}}\,e^{2\pi ik\xi}$$

является решением уравнения (21). В самом деле, подставляя этот ряд в равенство (21), имеем

$$f(x)=\int_0^1 K(|x-\xi|)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}}\,e^{2\pi ik\xi}\,d\xi=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}}\int_0^1 K(|x-\xi|)\,e^{2\pi ik\xi}\,d\xi.$$

Делая замену переменных в интегралах, стоящих справа, и полагая $x-\xi=\omega$, получим

$$f(x) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}} \int_x^{x-1} K(|\omega|)\, e^{-2\pi i\omega k} \cdot e^{2\pi i x k}\, d\omega =$$
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}} e^{2\pi i x k} \int_0^1 K(|\omega|)\, e^{-2\pi i\omega k}\, d\omega, \qquad (24)$$

так как

$$-\int_x^{x-1} K(|\omega|)\, e^{2\pi i\omega k}\, d\omega = \int_0^1 K(|\omega|)\, e^{2\pi i\omega k}\, d\omega,$$

ввиду того что функцию K можно периодически продолжить на отрезок $(-1, 0)$. Равенство (24) теперь перепишется в виде

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}_k\{f\}\, e^{2\pi i k x},$$

что является справедливым, согласно теореме А.

Таким образом мы доказали, что решение уравнения (21) представляется в виде

$$u(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}}\, e^{2\pi i k\xi},$$

причем этот ряд сходится в среднем.

Изучая равенства (22)

$$\mathfrak{F}_k\{u\} = \frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

получаем следующее предложение:

ТЕОРЕМА 4. *Если $\mathfrak{F}_k\{K\} \neq 0$ при всех целых значениях k, то ядро $K(|x-\xi|)$ — полное и уравнение* (21) *имеет не более одного суммируемого со своим квадратом решения.*

Доказательство. Если $\mathfrak{F}_k\{K\} \neq 0$ при всех целых k, то коэффициенты Фурье (22) функции $u(\xi)$ однозначно определяются. Если ряд (23) сходится, то уравнение (21) будет иметь решение, если же этот ряд расходится, то решения, суммируемого со своим квадратом, уравнение (21) не имеет. С другой стороны, это эквивалентно понятию полноты ядра $K\{|x-\xi|\}$. Таким образом, условие $\mathfrak{F}_k\{K\} \neq 0$ при всех целых k есть условие, достаточное для полноты ядра $K(|x-\xi|)$. Но легко показать, что это же условие является необходимым для полноты ядра $K(|x-\xi|)$. В самом деле, пусть хотя бы одно из значений $k = k^*$, т. е. $\mathfrak{F}_{k^*}\{K\} = 0$. Тогда решением уравнения (21) будет служить выражение

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}}\, e^{2\pi i k x} + C e^{2\pi i k^* x},$$

где C — совершенно произвольная постоянная. Здесь суммирование распространяется на все целые K, кроме $k = k^*$, что отмечено штрихом.

Таким образом, вопреки доказанному, уравнение (21) имеет бесчисленное количество решений, откуда заключаем, что для полноты ядра $K(|x-\xi|)$ необходимо, чтобы $\mathfrak{F}_k\{K\} \neq 0$ при всех целых k.

Следствие. *Если $\mathfrak{F}_k\{K\} \neq 0$ при всех целых k и при $f(x) \equiv 0$, то решение* (21) *тождественно равно нулю.*

В самом деле, если $f \equiv 0$, то $\mathfrak{F}_k\{f\} = 0$ при всех значениях $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, откуда, в силу $\mathfrak{F}_k\{K\} \neq 0$, будем иметь $\mathfrak{F}_k\{u\} = 0$, что доказывает утверждение.

Если некоторые $\mathfrak{F}_k\{K\} = 0$ и при этих же значениях k некоторые $\mathfrak{F}_k\{f\} \neq 0$, то ряд (23) расходится.

Наконец, в случае, когда некоторые из $\mathfrak{F}_k\{K\} = 0$ и при этих же значениях k $\mathfrak{F}_k\{f\} = 0$, величины $\mathfrak{F}_k\{u\}$ будут неопределенны и, следовательно, решение (21) будет неопределенно и представится в виде

$$u(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \mathfrak{F}_k\{u\} e^{2\pi i \xi k} + \sum_{k^*} C_{k^*} e^{2\pi i k^* \xi},$$

где k^* — те значения k, при которых $\mathfrak{F}_{k^*}\{K\} = \mathfrak{F}_{k^*}\{f\} = 0$, а штрих у суммы показывает, что она распространена на все целые значения k, за исключением $k = k^*$. Здесь C_{k^*} — совершенно произвольные постоянные. Таким образом уравнение (21) будет иметь бесчисленное множество решений.

§ 4. Решение интегральных уравнений второго рода с ядром $K(|x-y|)$

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(|x-y|)\, u(y)\, dy + f(x). \tag{25}$$

ТЕОРЕМА 5. *Если $f \in L^2$ и $K \in L^2$ и если при всех целых значениях $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$*

$$1 - \lambda \mathfrak{F}_k\{K\} \neq 0,$$

то интегральное уравнение (25) *имеет одно решение* $\in L^2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{1 - \lambda \mathfrak{F}_k\{K\}} e^{2\pi i k x}, \tag{26}$$

причем этот ряд сходится в среднем, так как по предположению

$$1 - \lambda \mathfrak{F}_k\{K\} \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и так как ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}_k^2\{f\}$ сходится в силу того, что $f \in L^2$. Таким образом $\Phi(x) \in L^2$. Покажем, что $\Phi(x)$ является решением уравнения (25).

В самом деле, подставив $\Phi(x)$ в равенство (25), получим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{1-\lambda\mathfrak{F}_k\{K\}} e^{2\pi ikx} = \int_0^1 K(|x-y|) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_l\{f\}}{1-\lambda\mathfrak{F}_l\{K\}} e^{2\pi ily} dy + f(x) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_l\{f\}}{1-\lambda\mathfrak{F}_l\{K\}} \int_0^1 K(|x-y|) e^{2\pi ily} dy + f(x).$$

Последнее справедливо в силу того, что ряд (26) сходится в среднем, почему можно менять порядок суммирования и интегрирования. Умножая последнее равенство на $e^{-2\pi imx}dx$ и интегрируя в (0, 1), получим в силу ортогональности и нормированности функций $e^{-2\pi imx}$

$$\frac{\mathfrak{F}_m\{f\}}{1-\lambda\mathfrak{F}_m\{K\}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_l\{f\}}{1-\lambda\mathfrak{F}_l\{K\}} \int_0^1\int_0^1 K(|x-y|) e^{2\pi ily} e^{-2\pi imx} dy\,dx + \mathfrak{F}_m\{f\}.$$

Двойные интегралы, стоящие под знаком суммы, легко преобразовать так:

$$\int_0^1\int_0^1 K(|x-y|) e^{2\pi ily} dy\, e^{-2\pi imx} dx = \int_0^1 e^{-2\pi imx} e^{2\pi ilx} \int_x^{x-1} K(|\omega|) e^{-2\pi il\omega} d\omega\, dx =$$

$$= \int_0^1 e^{-2\pi imx} e^{2\pi ilx} \int_0^1 K(|\omega|) e^{-2\pi il\omega} d\omega\, dx =$$

$$= \mathfrak{F}_l\{K\} \int_0^1 e^{2\pi ix(l-m)} dx = \begin{cases} 0 & l \neq m \\ \mathfrak{F}_l\{K\} & l = m. \end{cases}$$

Таким образом получаем равенство

$$\frac{\mathfrak{F}_m\{f\}}{1-\lambda\mathfrak{F}_m\{K\}} = \frac{\mathfrak{F}_m\{f\}\mathfrak{F}_m\{K\}}{1-\lambda\mathfrak{F}_m\{K\}} + \mathfrak{F}_m\{f\},$$

представляющее собою тождество. Таким образом получаем, что $\Phi(x)$ является решением интегрального уравнения (25), т. е.

$$\Phi(x) = u(x) \in L^2.$$

Покажем теперь, что это решение единственное, принадлежащее L^2. В самом деле, допустим противное, т. е. что существует функция $\Psi(x) \neq u(x)$, удовлетворяющая уравнению (25), и $\Psi(x) \in L^2$; тогда

$$\Psi(x) = \lambda \int_0^1 K(|x-y|)\,\Psi(y)\,dy + f(x).$$

Помножим обе части равенства на $e^{-2\pi imx}dx$ и проинтегрируем в (0, 1); получим по основной теореме

$$\mathfrak{F}_m\{\Psi\} = \lambda \int_0^1\int_0^1 K(|x-y|)\,\Psi(y)\,dy\, e^{-2\pi imx} dx + \mathfrak{F}_m\{f\} =$$

$$= \lambda\mathfrak{F}_m\{K\}\mathfrak{F}_m\{\Psi\} + \mathfrak{F}_m\{f\}$$

или

$$\mathfrak{F}_m\{\Psi\} = \frac{\mathfrak{F}_m\{f\}}{1-\lambda\mathfrak{F}_m\{K\}} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

т. е.

$$\mathfrak{F}_m\{\Psi\} = \mathfrak{F}_m\{u\} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

откуда следует, что

$$\Psi(x) = u(x).$$

§ 5. Решение интегродифференциальных уравнений

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение типа

$$f(x)+\sum_{k=0}^{m} A_k \frac{d^k u(x)}{dx^k}=\sum_{l=0}^{n}\int_0^1 K_l(|x-y|)\frac{d^l u(y)}{dy^l}\,dy. \tag{27}$$

Здесь $f\in L^2$, $K_l\in L^2$ $(l=0, 1, 2, \ldots, n)$, $A_0, \ldots, A_m$ — постоянные числа. Зададим, кроме того, значения $u, u', u'', \ldots, u^{(r-1)}$, где $r=\max(n, m)$, при $x=0$ и при $x=1$:

$$\left.\begin{aligned} &u(0),\ u'(0),\ \ldots,\ u^{(r-1)}(0),\\ &u(1),\ u'(1),\ \ldots,\ u^{(r-1)}(1). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Помножим обе части уравнения (27) на $e^{-2\pi ipx}\,dx$ и проинтегрируем в (0, 1); получим

$$\mathfrak{F}_p\{f\}+\sum_{k=0}^{m}A_k\int_0^1 e^{-2\pi ipx}\frac{d^k u(x)}{dx^k}\,dx=\sum_{l=0}^{n}\int_0^1\int_0^1 K_l(|x-y|)\,e^{-2\pi ipx}\frac{d^l u}{dy^l}\,dy\,dx=$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\int_0^1\frac{d^l u(y)}{dy^l}\int_0^1 K_l(|x-y|)\,e^{-2\pi ipx}\,dx\,dy$$

и по теореме о свертывании

$$\mathfrak{F}_p\{f\}+\sum_{k=0}^{m}A_k\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u^k(x)\,dx=\sum_{l=0}^{n}\mathfrak{F}_p\{K_l\}\cdot\int_0^1 e^{-2\pi ipy}u^{(l)}(y)\,dy.$$

Интегрированием по частям получаем формулы:

$$\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u^{(k)}(x)\,dx=\left[e^{-2\pi ipx}u^{(k-1)}(x)\right]_0^1+2\pi ip\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u^{(k-1)}(x)\,dx=$$

$$=\left[e^{-2\pi ipx}u^{(k-1)}(x)\right]_0^1+2\pi ip\left[e^{-2\pi ipx}u^{(k-2)}(x)\right]_0^1+(2\pi ip)^2\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u^{(k-2)}(x)\,dx=$$

$$=\sum_{q=1}^{k}(2\pi ip)^{q-1}\left[u^{(k-q)}(1)-u^{(k-q)}(0)\right]+(2\pi ip)^k\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u(x)\,dx.$$

Подставляя полученное равенство в предыдущее, получаем

$$\mathfrak{F}_p\{f\}+\sum_{k=1}^{m}A_k\Big(\sum_{q=1}(2\pi ip)^{q-1}\left[u^{(k-q)}(1)-u^{(k-q)}(0)\right]+$$

$$+(2\pi ip)^k\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u(x)\,dx\Big)+A_0\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u(x)\,dx=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\mathfrak{F}_p\{K_l\}\Big(\sum_{q=1}^{l}(2\pi ip)^{q-1}\left[u^{(l-q)}(1)-u^{(l-q)}(0)\right]+$$

$$+(2\pi ip)^l\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u(x)\,dx\Big)+\mathfrak{F}_p\{K_0\}\cdot\int_0^1 e^{-2\pi ipx}u(x)\,dx. \tag{29}$$

Обозначим

$$\mathfrak{F}_p\{u\} = \int\limits_0^1 e^{-2\pi i p x} u(x)\,dx \qquad (p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Из (29) получаем выражение для $\mathfrak{F}_p\{u\}$ в виде

$$\mathfrak{F}_p\{u\} =$$

$$= \frac{\mathfrak{F}_p\{f\} + \sum\limits_{k=1}^{m} A_k \sum\limits_{q=1}^{k} (2\pi i p)^{q-1}[u^{(k-q)}(1) - u^{(k-q)}(0)] - \sum\limits_{l=1}^{n} \mathfrak{F}_p\{K_l\} \sum\limits_{q=1}^{l} (2\pi i p)^{q-1}[u^{(l-q)}(1) - u^{(l-q)}(0)]}{\sum\limits_{l=0}^{n} \mathfrak{F}_p\{K_l\}(2\pi i p)^l - \sum\limits_{k=0}^{m} A_k (2\pi i p)^k}$$

$$(p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{30}$$

В правой части последнего равенства стоят известные величины

$$\mathfrak{F}_p\{f\}, \quad A_k, \quad \mathfrak{F}_p\{K_k\}, \quad u^{(k)}(0), \quad u^{(k)}(1).$$

Уравнение (27) будет иметь решение $\in L^2$, если ряд

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}_p^2\{u\}$$

сходится. Тогда решение (27) будет представляться в виде сходящегося в среднем ряда

$$u(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}_p\{u\}\, e^{2\pi i p x}, \tag{31}$$

где $\mathfrak{F}_p\{u\}$ даются равенствами (30).

§ 6. Одно из возможных обобщений теоремы о свертывании

В § 2 свертывание было определено так:

$$F_1(x) * F_2(x) = \int\limits_0^1 F_1(|x - \xi|)\, F_2(\xi)\, d\xi \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Пусть $F_1 \in L^2$ и $F_2 \in L^2$ и, кроме того, наложим на F_1 условие, что $F_1(x-y)$ и $F_1(\omega) = F_1(\omega + 1)$ для $-1 \leqslant \omega \leqslant 1$.

Тогда, как легко видеть, будет справедлива теорема 2 о свертывании, а следовательно, и все остальное будет справедливо для такого типа ядер.

§ 7. Приложение рядов Фурье к решению нелинейных интегральных уравнений

Можно сделать такое обобщение понятия о свертывании: пусть даны функции

$$F_1 \in L^2, \quad F_2 \in L^2, \ \ldots\ , F_{n+1} \in L^2 \tag{32}$$

и пусть для значений $-n \leqslant x \leqslant n$

$$F_{\cdot}(x) = F_1(x + 1).$$

Назовем свертыванием функций (32) n-кратный интеграл

$$F_1 * F_2 * \ldots * F_{n+1} =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_1(x - x_1 - \ldots - x_n) F_2(x_1) \ldots F_{n+1}(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \quad (33)$$

ТЕОРЕМА 6. *Если $F_1 \in L^2$, $F_2 \in L^2, \ldots, F_{n+1} \in L^2$ и если $F_1 * F_2 * \ldots$ $\ldots * F_{n+1} \in L^2$, то*

$$\mathfrak{F}_m\{F_1 * F_2 * \ldots * F_{n+1}\} = \mathfrak{F}_m\{F_1\} \cdot \mathfrak{F}_m\{F_2\} \ldots \mathfrak{F}_m\{F_{n+1}\}$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (34)$$

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2. Опираясь на эту теорему, легко доказать такую теорему:

ТЕОРЕМА 7. *Интегральное уравнение*

$$f(x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 K(x - x_1 - \ldots - x_n)\, u(x_1) \ldots u(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \quad (35)$$

у которого $f \in L^2$, $K \in L^2$ и $K(\omega) = K(\omega + 1)$ при $-n \leqslant \omega \leqslant n$, имеет не более чем счетное число решений, выражаемых формулами

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^{(k)} e^{2\pi i l x} \quad (k = 1, 2, , \ldots, n),$$

где

$$a_l^{(k)} = \sqrt[n]{\frac{\mathfrak{F}_l\{f\}}{\mathfrak{F}_l\{K\}}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \ l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

n значений корней n-ой степени, если ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\mathfrak{F}_l\{f\}}{\mathfrak{F}_l\{K\}} \right|^{\frac{2}{n}} \quad (36)$$

сходится.

Доказательство. Пользуясь равенством (33), представим (35) в виде

$$f = K * u * \ldots * u.$$

Имея в виду (34), получим

$$\mathfrak{F}_m\{f\} = \mathfrak{F}_m\{K\} \cdot (\mathfrak{F}_m\{u\})^n \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

откуда

$$\mathfrak{F}_m\{u\} = \sqrt[n]{\frac{\mathfrak{F}_m\{f\}}{\mathfrak{F}_m\{K\}}} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Различные значения этого корня, имеющие один и тот же модуль, обозначим через

$$a_m^{(1)}, \quad a_m^{(2)}, \ldots, a_m^{(n)}.$$

Так как по (36) ряд квадратов модулей этих величин сходится, то сходятся в среднем ряды

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^{(k)} e^{2\pi i l x} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

представляющие, как легко проверить, решения уравнения (35). Из последней формулы видно, что число всевозможных решений уравнения (35) будет счетное.

Следствие. Если n — нечетное число и $\mathfrak{F}_k\{f\}$ и $\mathfrak{F}_k\{K\}$ при $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ вещественные числа, то при выполнении условий теоремы уравнение (35) имеет одно вещественное решение, выражаемое формулой

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\mathfrak{F}_k\{f\}}{\mathfrak{F}_k\{K\}}\right]^{\frac{1}{n}} e^{2\pi ikx},$$

причем ряд сходится в среднем и в формуле берутся вещественные значения корней.

Доказанную теорему можно обобщить следующим образом:

ТЕОРЕМА 8. *Интегральное уравнение, у которого*

$$K_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_k(x - x_1 - \ldots - x_k)\, u(x_1) \ldots u(x_k)\, dx_1 \ldots dx_k, \quad (37)$$

имеет счетное число решений, выражаемых формулами

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{2\pi ikx}, \quad (38)$$

где a_l $(l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *корни алгебраических уравнений*

$$\mathfrak{F}_l\{K_n\}\xi^n + \mathfrak{F}_l\{K_{n-1}\}\xi^{n-1} + \ldots + \mathfrak{F}_l\{K_1\}\xi - \mathfrak{F}_l\{K_0\} = 0$$
$$(l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad (39)$$

если при достаточно больших $|l| > l_0$ *выполняются условия*

$$\left|\frac{\mathfrak{F}_l\{K_i\}}{\mathfrak{F}_l\{K_n\}}\right| < \frac{A_l^n}{2^n |l|^{bn}} \quad (0 < A_l < l^{b_1}; \quad b - b_1 > 1, \quad b_1 > 0) \quad (40)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

При выполнении этих условий ряды (38) *абсолютно и равномерно сходятся.*

Доказательство. Умножая (37) на $e^{-2\pi ilx}dx$ и интегрируя в $(0, 1)$, получим, опираясь на теорему 6, равенства (39). Оценим величину модуля решений уравнения (39), для чего перепишем (39) в виде

$$\xi^n + \frac{\mathfrak{F}_l\{K_{n-1}\}}{\mathfrak{F}_l\{K_n\}}\xi^{n-1} + \ldots + \frac{\mathfrak{F}_l\{K_1\}}{\mathfrak{F}_l\{K_n\}}\xi - \frac{\mathfrak{F}_l\{K_0\}}{\mathfrak{F}_l\{K_n\}} = 0 \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

или

$$f_l(\xi) = \xi^n + b_{n-1}^{(l)}\xi^{n-1} + \ldots + b_1^{(l)}\xi - b_0^{(l)} = 0 \quad (l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (41)$$

Покажем, что при выполнении условий (40)

$$|b_i^{(l)}| < \frac{A_l^n}{2^n |l|^{bn}} \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

каждое из решений (39) будет удовлетворять условию

$$|\xi| < \frac{A_l}{|l|^b} \quad \text{при } b > 1. \quad (42)$$

Для этого достаточно показать, что при $|\xi| \geqslant \frac{A_l}{|l|^b}$ будет $|f_l(\xi)| > 0$. В самом деле

$$|f_l(\xi)| \geqslant |\xi|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |b_k^{(l)}| \cdot |\xi|^k > |\xi|^n - \frac{A_l^n}{2^n |l|^{bn}} \sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k. \qquad (43)$$

При $\frac{A_l}{|l|^b} \leqslant |\xi| \leqslant 2$ это выражение > 0, так как при $|\xi| \geqslant \frac{A_l}{|l|^b}$ и в виду

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1,$$

будем иметь

$$|f_l(\xi)| > |\xi|^n - \frac{A_l^n}{|l|^{bn}} > 0$$

для достаточно больших значений $|l|$. При $|\xi| > 2$ последнее неравенство будет иметь место для достаточно больших значений $|l|$, так как $|\xi|^n$ быстро возрастает (из $A_l < |l|^b$ следует

$$\frac{A_l^n}{2^n |l|^{bn}} \sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k = \frac{A_l^n (|\xi|^n - 1)}{2^n |l|^{bn}},$$

поэтому последний член неравенства (43) возрастает медленнее, чем $|\xi|^n$).

Так как при достаточно больших $|l|$ будет $|a_l| < \frac{A_l}{|l|^b}$ при $b > 1$, причем $\frac{A_l}{|l|^b} < \frac{1}{|l|^{b-b_1}}$ при $b - b_1 > 1$, то ряд

$$\left| \sum_{l > l_0} a_l e^{2\pi i k x} \right| \leqslant \sum_{l > l_0} |a_l| < \sum_{l > l_0} \frac{1}{|l|^{b-b_1}}$$

будет сходиться. Таким образом получаем, что ряды (38) абсолютно и равномерно сходятся, откуда легко показать, что эти ряды удовлетворяют интегральному уравнению (37). По построению этих решений видно, что их число счетно.

Указанный метод без труда распространяется на уравнения типа

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_k(x - x_1 - \ldots - x_k)\, u(x_1) \ldots u(x_k)\, dx_1 \ldots dx_k + f(x),$$

где K_k удовлетворяют указанным в предыдущей теореме условиям.

Псковский педагогический институт.

Поступило 26.III.1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Herglotz G., Über die Integralgleichungen der Elektronentheorie, Mathem. Ann., 65 (1907).
[2] Fock V., Mathem. Zeitschr. (1924).
[3] Смирнов Н. С., Об одном классе линейных интегральных уравнений, Труды 2-го Всесоюзного съезда математиков, т. 2, 1936, стр. 272.
[4] Doetsch G., Beitrag zu Watsons „General Transformation", Mat. Ann. 113 (1936).
[5] Привалов И. И., Интегральные уравнения, М. 1935, стр. 148—49.

N. SMIRNOFF. SUR L'APPLICATION DES SÉRIES DE FOURIER À LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES ET INTÉGRODIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

Soit L^2 la classe des fonctions à carré sommable. Introduisons encore les notations

$$\mathfrak{F}_k\{F\} = \int_0^1 e^{-2\pi i x k} F(x)\,dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$F_1 * F_2 = \int_0^1 F_1(x-\xi) F_2(\xi)\,d\xi$$

$$F_1(\omega) = F_1(\omega+1) \qquad (-1 \leq \omega \leq 1).$$

Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si* $F_1 \in L^2$, $F_2 \in L^2$ *et* $F_1 * F_2 \in L^2$, *on a*

$$\mathfrak{F}_m\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{F}_m\{F_1\} \cdot \mathfrak{F}_m\{F_2\} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

En s'appuyant sur ce théorème on resoud facilement les équations intégrales linéaires de première espèce ayant pour noyau $K(x-\xi)$ où $K(\omega) = K(\omega+1)$ (pour $-1 \leq \omega \leq 1$) (voir le § 3), les équations intégrales linéaires ayant un noyau du type indiqué (§ 4) et les équations intégrodifférentielles (27) contenant des noyaux du même type (§ 5). Les solutions de toutes ces équations sont données sous la forme de séries de Fourier dont on calcule les coefficients suivant des formules simples que nous indiquons. Pour les mêmes équations nous donnons des conditions pour l'existence de solutions appartenant à L^2.

Dans le dernier paragraphe nous considérons une généralisation du théorème précédemment cité.

Soient $F_1 \in L^2, \ldots, F_{n+1} \in L^2$ et soit $F_1(x) = F_1(x+1)$ pour $-n \leq x \leq n$;

$$F_1 * \ldots * F_{n+1} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_1(x - x_1 - \ldots - x_n) F_2(x_1) \ldots F_{n+1}(x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

On a alors le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si* $F_1 \in L^2, \ldots, F_{n+1} \in L^2$ *et* $F_1 * \ldots * F_{n+1} \in L^2$, *on a*

$$\mathfrak{F}_m\{F_1 * \ldots * F_{n+1}\} = \mathfrak{F}_m\{F_1\} \ldots \mathfrak{F}_m\{F_{n+1}\} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ce théorème permet d'étudier les classes d'équations intégrales non linéaires de la forme (35)

$$K_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_k(x - x_1 - \ldots - x_k)\, u(x_1) \ldots u(x_k)\,dx_1 \ldots dx_k,$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_k(x - x_1 - \ldots - x_k)\, u(x_1) \ldots u(x_k)\,dx_1 \ldots dx_k + K_0(x)$$

(voir les théorèmes 7 et 8 du § 7).

Les solutions de ces équations sont données sous la forme de séries trigonométriques dont les coefficients sont des racines d'équations algébriques. Ainsi, par exemple, pour déterminer les coefficients de la série de Fourier qui est la solution de l'équation (35) on a les équations algébriques (39)

$$\mathfrak{F}_l\{K_n\}\,\xi^n + \ldots + \mathfrak{F}_l\{K_1\}\,\xi - \mathfrak{F}_l\{K_0\} = 0 \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

En désignant les racines de ces équations par

$$a_1^{(l)}, \ldots, a_n^{(l)} \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

nous obtenons une infinité dénombrable de solutions de la forme (38) pour l'équation (35).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Н. А. АРТЕМЬЕВ

ОСУЩЕСТВИМЫЕ ТРАЕКТОРИИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе исследуется устойчивость замкнутых траекторий, определяемых системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \ldots, x_n), \; j=1, 2, \ldots, n,$$

не только по отношению к возмущениям начальных условий, но и по отношению к возмущениям правых частей уравнений.

§ 1. Введение

В предыдущей работе (1) я ввел понятие «осуществимых» движений и «осуществимых» траекторий и установил для некоторого класса периодических движений достаточный признак осуществимости. В этой работе я устанавливаю достаточный признак осуществимости траекторий для другого класса периодических движений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \ldots, x_n), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

заданную в какой-либо ограниченной области $\mathfrak{G}$ n-мерного пространства R_n, координатами точек которого являются $x_1, \ldots, x_n$. Точку $(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать символом $\{x\}$, а иногда просто x.

Относительно функций X_j сделаем следующие предположения:

1° X_j, $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, вещественны, однозначны и непрерывны в замкнутой области $\overline{\mathfrak{G}}$.

2° Частные производные $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, удовлетворяют в области $\overline{\mathfrak{G}}$ условию Липшица

$$\left| \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{x'} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{x} \right| \leq L \sum_{k=1}^{n} |x'_k - x_k|,$$

где L — постоянная.

Возьмем в начальный момент $t=0$ какую-либо точку $\in \mathfrak{G}$. В силу сделанных предположений этим начальным условиям будет соответствовать некоторое решение системы (1)

$$\{x\}=\{\varphi(t)\}. \tag{2}$$

Мы предположим, что решение (2) существует при всех $t \geqslant 0$ и при этих значениях принадлежит области $\mathfrak{G}$.

Будем интерпретировать решение (2) в $n+1$-мерном пространстве с координатами $(t, x_1, \ldots, x_n)$. Этому решению соответствует $n+1$-мерная интегральная кривая. Символом $U_\eta(\{\varphi(t)\}^+)$ обозначим окрестность этой интегральной кривой, рассматриваемой при $0 \leqslant t$. Символом $U_\eta(K^+)$ обозначим η-окрестность положительной полутраектории K^+ этого движения.

Напомним определение осуществимого движения и траектории. Рассмотрим наряду с системой (1) измененную систему *

$$\frac{dy_j}{dt}=X_j(y_1, \ldots, y_n)+\varepsilon Y_j(t, y_1, \ldots, y_n), \qquad j=1, \ldots, n, \tag{3}$$

в которой функции Y_j удовлетворяют следующим условиям: $Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ вещественны, однозначны, непрерывны при $0 \leqslant t$, $\{y\} \in \overline{\mathfrak{G}}$ и во всей этой области ограничены, именно

$$|Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant 1. \tag{4}$$

Кроме того в той же области они удовлетворяют условию Липшица

$$|Y_j(t, y_1', \ldots, y_n')-Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant l \sum_{k=1}^{n} |y_k'-y_k|, \tag{5}$$

где l — постоянная.

Определение I. Движение $\{\varphi(t)\}$ системы (1) положительно осуществимо, если для всякого сколь угодно малого числа $\delta>0$ можно найти такое $\varepsilon(\delta)>0$, что движение $\{\psi(t)\}$ измененной системы (3), удовлетворяющее начальным условиям $\{\psi(0)\}=\{\varphi(0)\}+\{a\}$, где $|a_j| \leqslant \varepsilon$, $j=1, \ldots, n$, существует при всех $t \geqslant 0$ и при всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства $|\psi_j(t)-\varphi_j(t)| \leqslant \delta$, $j=1, \ldots, n$.

Определение II. Полутраектория K^+ движения $\{\varphi(t)\}$ положительно осуществима, если для всякого сколь угодно малого числа $\delta>0$ можно найти такое $\varepsilon(\delta)>0$, что полутраектория L^+ движения $\{\psi(t)\}$ измененной системы принадлежит окрестности $U_\delta(K^+)$.

* Вопросом о возмущениях в самих уравнениях занимался P. Bohl (2).

После того как эта статья была сдана в редакцию «Известий АН», мне стала известна еще работа Н. Г. Четаева, в которой также исследуется вопрос об устойчивости решения в зависимости от возмущений в уравнениях. Однако в своей интересной статье Н. Г. Четаев решает совсем иную задачу, так что результаты настоящей статьи не теряют своего значения (3, 4, 5).

Пусть $\bar{g} \subset \mathfrak{G}$ какая-либо замкнутая область. Предположим, что решение $\{\varphi(t)\}$ периодическое и $\in \bar{g}$. Не ограничивая общности, период его можно считать равным 2π. Пусть, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \geqslant b^2 > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{6}$$

где b^2 — постоянная. Положим

$$y_j = \varphi_j(t) + z_j(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

и составим дифференциальные уравнения для $\{z\}$. Имеем

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi} z_k + R_j(t, z_1, \ldots, z_n) + \varepsilon Y_j(t, \varphi_1 + z_1, \ldots, \varphi_n + z_n) \tag{7}$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим уравнения в вариациях

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi} \cdot \bar{z}_k, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Так как правые части системы (1) не зависят явно от времени, то, как известно, один из характеристических показателей решения $\{\varphi(t)\}$ равен нулю. Если все остальные характеристические показатели имеют отрицательные вещественные части, то решение $\{\varphi(t)\}$ будет положительно устойчивым в смысле Ляпунова [6,7]. Мы покажем, что в этом случае замкнутая траектория K этого периодического движения $\{\varphi(t)\}$ будет положительно осуществимой.

Заметим попутно, что при доказательстве устойчивости в смысле Ляпунова авторы [6] предполагали правые части системы (1) аналитическими функциями и пользовались одной теоремой Ляпунова о существовании так называемой «поверхности Ляпунова».

Доказательство существования поверхности Ляпунова, данное им самим, довольно сложно. Эта сложность, а также требование аналитичности правых частей уравнений происходит от того, что Ляпунов доказывал теорему для любого движения, не обязательно периодического. Доказательство же устойчивости периодического решения может быть проведено, даже при соблюдении только условий 1°, 2° значительно проще.

§ 2. Постановка задачи

Итак, пусть в ограниченной области $\mathfrak{G}$ задана система дифференциальных уравнений (1), правые части которой в этой области удовлетворяют условиям 1° и 2°.

Пусть $\{x\} = \{\varphi(t)\}$ будет периодическое решение системы (1) периода 2π, траектория которого K принадлежит при всех t области $\bar{g} \subset \mathfrak{G}$, причем соблюдается неравенство (6). Пусть $\{a\}$ какая-либо точка, лежащая на K, а $\varphi_t a$ периодическое движение системы (1), соответствующее начальным условиям $\{\varphi(0)\} = \{a\}$.

Рассмотрим движение $\varphi_{t+h} a$, отличающееся от $\varphi_t a$ на фазу h. Возьмем на траектории K точку $\varphi_h a$, соответствующую моменту $t = 0$, т. е.

$$a_j = \varphi_j(h), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Положим

$$y_j(t) = \varphi_j(t+h) + z_j(t, h) \tag{10}$$

и составим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi(t+h)} \cdot z_k + R_j(t+h, z_1, \ldots, z_n) + \\ + \varepsilon Y_j(t, \varphi_1(t+h) + z_1, \ldots, \varphi_n(t+h) + z_n). \tag{11}$$

Составим также уравнения в вариациях

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t+h)\,\bar{z}_k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где

$$A_{jk}(t+h) = \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi(t+h)}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Так как один из характеристических показателей решений системы (12) равен нулю, то матрица $\Theta(t+h)$ фундаментальной системы решений в канонической форме имеет вид

$$\Theta(t+h) = \left\| \begin{array}{l} \theta_{11}(t+h), \ \ldots\ldots, \ \theta_{1n}(t+h) \\ e^{\sigma_2(t+h)}\,\theta_{21}(t+h), \ \ldots, \ e^{\sigma_2(t+h)}\,\theta_{2n}(t+h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\sigma_n(t+h)}\,\theta_{n1}(t+h), \ \ldots, \ e^{\sigma_n(t+h)}\,\theta_{nn}(t+h) \end{array} \right\| \tag{13}$$

Предположим теперь, что вещественные части всех остальных характеристических показателей $\sigma_k = -\lambda_k + i\omega_k$, $k = 2, \ldots, n$, удовлетворяют условию

$$\lambda_k \geq \beta > 0, \quad k = 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Определение III. Все периодические решения $\{\varphi(t)\}$ системы (1) периода 2π, удовлетворяющие условиям:

1) $\{\varphi(t)\} \in \bar{g} \subset \mathfrak{G}$ при любом t,
2) характеристические показатели σ_k $(k = 2, \ldots, n)$, решений системы (12) удовлетворяют неравенству (14),

назовем периодическими решениями класса $A(\beta, \bar{g})$.

Наша задача — показать, что траектория K всякого периодического решения класса $A(\beta, \bar{g})$ положительно осуществима.

§ 3

Дифференцируя тождества

$$\frac{d\varphi_j}{dt} \equiv X_j[\varphi_1(t+h), \ldots, \varphi_n(t+h)], \quad j = 1, \ldots, n,$$

по h, находим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_j}{\partial h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi(t+h)} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial h}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

или в силу равенства $\frac{\partial \varphi_j}{\partial h} = \frac{d\varphi_j}{dt} = \dot{\varphi}_j(t+h)$ получаем

$$\frac{d\dot{\varphi}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi(t+h)} \cdot \dot{\varphi}_k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

т. е. $\{\dot{\varphi}(t+h)\}$ есть периодическое решение уравнений в вариациях.

Рассмотрим вектор

$$\mathfrak{t}(t+h) = \frac{\dot{\varphi}_1(t+h)\bar{e}_1 + \ldots + \dot{\varphi}_n(t+h)\bar{e}_n}{\sqrt{[\dot{\varphi}_1(h)]^2 + \ldots + [\dot{\varphi}_n(h)]^2}}, \tag{16}$$

где $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — орты в прямоугольной системе координат $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

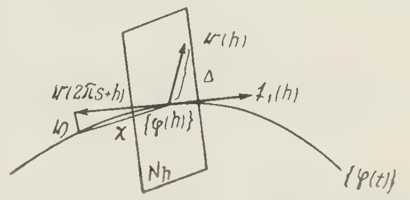
Начало этой системы координат находится в силу (10) в точке $\{\varphi(t+h)\}$, а оси параллельны соответствующим осям системы $y_1, \ldots, y_n$. Этот вектор направлен таким образом вдоль касательной к траектории K и отличается только длиной от вектора скорости точки $\{\varphi(t+h)\}$. При $t=0$ длина вектора $\mathfrak{t}_1(h)$ равна 1, а его начало находится в точке $\{a\}$. Вектор

$$\theta_{11}(t+h)\bar{e}_1 + \ldots + \theta_{1n}(t+h)\bar{e}_n,$$

соответствующий первому решению фундаментальной системы (13), может отличаться от вектора $\mathfrak{t}_1(t+h)$ лишь на постоянный множитель Δ; поэтому

$$\theta_{11}(t+h)\bar{e}_1 + \ldots + \theta_{1n}(t+h)\bar{e}_n = \Delta\mathfrak{t}_1(t+h). \tag{17}$$

Проведем через точку $\{a\}$ гиперплоскость N_h $n-1$-го измерения, перпендикулярную к вектору $\mathfrak{t}_1(h)$ (см. чертеж). Примем точку $\{a\}$ за начало новой системы прямоугольных координат той же ориентации, направив первую ось новой системы вдоль вектора $\mathfrak{t}_1(h)$. Остальные $n-1$ осей будут очевидно расположены в гиперплоскости N_h. Выбор этих осей допускает известный произвол. Построим теперь из матрицы $\Theta(t+h)$ новую фундаментальную систему $U(t+h)$



$$U(t+h) = A\Theta(t+h) \tag{18}$$

так, чтобы каждая строка матрицы $U(h)$ давала соответствующий единичный вектор новой ортогональной системы координат. В силу такого выбора фундаментальной системы

$$\mathfrak{t}_1(h) = u_{11}(h)\bar{e}_1 + \ldots + u_{1n}(h)\bar{e}_n. \tag{19}$$

Полагая

$$\mathfrak{t}_j(t) = u_{j1}(t)\bar{e}_1 + \ldots + u_{jn}(t)\bar{e}_n, \tag{19^1}$$

в силу ортогональности матрицы $U(h)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} u_{jk}^2(h) = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} u_{jk}(h)u_{sk}(h) = 0, \tag{20}$$
$$j \neq s, \quad j, s = 1, \ldots, n.$$

Векторы $\mathfrak{t}_j(t+h)$, $j=1, \ldots, n$ являются ортами новой системы при $t=0$. Возьмем теперь вектор $\mathfrak{r}(t+h)$

$$\mathfrak{r}(t+h) = C_2\mathfrak{t}_2(t+h) + \ldots + C_n\mathfrak{t}_n(t+h), \tag{21}$$

где $C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Мы будем считать их независящими от h. Таким образом длина вектора $\mathfrak{r}(h)$, которую мы обо-

значим через Δ, не будет зависеть от h и будет определяться, на основании (21), равенством

$$\Delta^2 = C_2^2 + \ldots + C_n^2. \tag{21^1}$$

Вектор $\mathfrak{r}(h)$ расположен очевидно в гиперплоскости N_h.

Пусть B — матрица интегральной подстановки* фундаментальной системы $U(t+h)$, соответствующей периоду 2π, тогда

$$U(t+h+2\pi) = BU(t+h). \tag{22}$$

Составим вектор $\mathfrak{r}(2\pi s+h)$, где s — целое число, и выразим его через элементы матрицы $U(h)$ с помощью (19^1) и (22). Имеем

$$U(t+h+2\pi s) = B^s U(t+h) \tag{23}$$

и

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}(2\pi s+h) &= C_2\mathfrak{t}_2(2\pi s+h) + \ldots + C_n\mathfrak{t}_n(2\pi s+h) = \\ &= \{C_2u_{21}(2\pi s+h) + \ldots + C_nu_{n1}(2\pi s+h)\}\bar{e}_1 + \ldots + \\ &\quad + \{C_2u_{2n}(2\pi s+h) + \ldots + C_nu_{nn}(2\pi s+h)\}\bar{e}_n = \\ &= \left\{u_{11}(h)\sum_{k=2}^n C_kc_{k1} + \ldots + u_{n1}(h)\sum_{k=2}^n C_kc_{kn}\right\}\bar{e}_1 + \ldots + \\ &\quad + \left\{u_{1n}(h)\sum_{k=2}^n C_kc_{k1} + \ldots + u_{nn}(h)\sum_{k=2}^n C_kc_{kn}\right\}\bar{e}_n,\end{aligned} \tag{24}$$

где c_{jk} суть элементы матрицы $C = B^s$.

Вычитая из вектора $\mathfrak{r}(2\pi s+h)$ вектор

$$\sum_{k=2}^n C_kc_{k1}[u_{11}(h)\bar{e}_1 + \ldots + u_{1n}(h)\bar{e}_n] = \sum_{k=2}^n C_kc_{k1}\cdot\mathfrak{t}_1(h),$$

получим вектор $\mathfrak{r}_N(2\pi s+h)$, представляющий проекцию вектора $\mathfrak{r}(2\pi s+h)$ на гиперплоскость N_h

$$\mathfrak{r}_N(2\pi s+h) = \sum_{k=2}^n C_kc_{k2}\cdot\mathfrak{t}_2(h) + \ldots + \sum_{k=2}^n C_kc_{kn}\cdot\mathfrak{t}_n(h). \tag{25}$$

Обозначая длину этого вектора через $\Delta_N(2\pi s+h)$, имеем

$$\Delta_N^2(2\pi s+h) = \left[\sum_{k=2}^n C_kc_{k2}\right]^2 + \ldots + \left[\sum_{k=2}^n C_kc_{kn}\right]^2. \tag{26}$$

В правую часть формулы (26) входят не все элементы матрицы C, а только элементы

$$\begin{matrix} c_{22}, & \ldots, & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n2}, & \ldots, & c_{nn}. \end{matrix}$$

Матрицу $n-1$-го порядка, составленную из этих элементов, назовем C_0. Наша задача оценить элементы c_{jk} матрицы C_0. Из уравнений (17) и (19^1) находим

$$u_{1k}(2\pi s+t+h) = u_{1k}(t+h), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

---

* Так как коэффициенты $A_{jk}(t+h)$ вещественны и произвольные постоянные $C_2, \ldots, C_n$ всегда выбираются вещественными, то элементы матриц U и B будут вещественны.

Теперь из (23) и (27) получаем тождества

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}u_{11}(t+h)+\ldots+c_{1n}u_{n1}(t+h)=u_{11}(t+h), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{11}u_{1n}(t+h)+\ldots+c_{1n}u_{nn}(t+h)=u_{1n}(t+h). \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Рассматривая (28) как систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_{11}, \ldots, c_{1n}$ и замечая, что определитель этой системы $D(U(t+h)) \neq 0$ ни при каком конечном t (так как это определитель Вронского фундаментальной системы), убеждаемся, что единственным решением этой системы является

$$c_{11}=1, \quad c_{12}=0, \; \ldots, \; c_{1n}=0. \qquad (29)$$

Таким образом *

$$C=\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right\|^{s} \qquad (30)$$

Представим матрицу B в виде суммы двух матриц:

$$B=\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right\|. \qquad (31)$$

Матрица $E=\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right\|$ есть матрица проектирования в том смысле, что $E^2=E$.

Матрица $\left\|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right\| = [0, B_0]$, где $B_0=\left\|\begin{array}{ccc} b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right\|$.

Далее, произведение матрицы E на любую квазидиагональную матрицу $[0, H]$ структуры $[1, n-1]$ равно нулю. Поэтому

$$B^s=(E+[0, B_0])^s=E+[0, B_0^s],$$

и следовательно

$$B_0^s=C_0. \qquad (32)$$

Таким образом оценка ** матрицы C_0 сводится к оценке матрицы B_0^s.

---

* Приведенное далее рассуждение применимо при любом s, следовательно, и при $s=1$, т. е. $b_{11}=1$, $b_{12}=0, \ldots, b_{1n}=0$.

** Если дана матрица X, то символ $|X|$ мы условимся понимать как матрицу, элементами которой являются модули соответствующих элементов матрицы X. Пусть даны две матрицы $|X|$ и Y. Если $|x_{jk}| \leqslant y_{jk}$, $j, k=1, \ldots, n$, причем хотя бы для одного элемента $|x_{\mu\nu}| < y_{\mu\nu}$, то будем говорить, что матрица $|X|$ меньше матрицы Y, в обозначениях $|X| < Y$.

Символ $|X| < \|\varepsilon\|$ означает, что среди n^2 неравенств $|x_{jk}| \leqslant \varepsilon$, $j, k=1, \ldots, n$ есть хотя бы одно $|x_{\mu\nu}| < \varepsilon$ существенное неравенство. Таким образом неравенство $|X| \leqslant \|\varepsilon\|$ эквивалентно n^2 неравенствам $|x_{jk}| \leqslant \varepsilon$, $j, k=1, \ldots, n$. Здесь следует отметить, что введенное мною понятие неравенства между матрицами отличается от определения неравенства, которым пользуется Лаппо-Данилевский (8).

Составим теперь характеристический полином матрицы B. Имеем в силу вида матрицы B

$$D(\rho I - B) = (\rho - 1)(\rho - \rho_2) \ldots (\rho - \rho_n) = (\rho - 1) D(\rho I - B_0), \tag{33}$$

где I — единичная матрица; откуда

$$D(\rho I - B_0) = (\rho - \rho_2) \ldots (\rho - \rho_n), \tag{34}$$

т. е. характеристические числа матрицы B_0 суть $\rho_2, \ldots, \rho_n$.

§ 4

ЛЕММА *. *Всякое решение уравнений в вариациях* (12), *соответствующих решению системы* (1) *класса* $A\ (\beta, \bar{g})$, *изображаемое в начальный момент вектором* $\mathfrak{x}(h)$, *лежащим в гиперплоскости* N_h, *удовлетворяет неравенству*

$$\Delta_N (2\pi s + h) \leqslant \Delta \cdot (n-1) \frac{M^{n-1} - 1}{M - 1} \cdot e^{-2\pi s \beta}, \tag{35}$$

где

$$M = s(n-1)[1 + \Delta \cdot n e^{2\pi(\beta + nA)}]. \tag{35¹}$$

Доказательство. Характеристические числа матрицы, в силу сделанного предположения (7), удовлетворяют неравенствам

$$|\rho_k| \leqslant e^{-2\pi\beta}, \quad k = 2, \ldots, n. \tag{36}$$

Имеем

$$B = U^{-1}(h) \cdot U(2\pi + h) \tag{37}$$

и в силу ортогональности матрицы $U^{-1}(h)$

$$|U^{-1}(h)| \leqslant \| 1 \|. \tag{38}$$

Составим систему уравнений, усиливающую по отношению к системе (12)

$$\frac{dy_j}{dt} = A \sum_{k=1}^{n} y_k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{38¹}$$

где

$$|A_{jk}(t)| \leqslant A, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Решение этой системы, изображаемое в начальный момент вектором $\Delta \cdot [\mathfrak{t}_2(h) + \ldots + \mathfrak{t}_n(h)]$, удовлетворяет неравенству

$$y_{jk}(t + h) \leqslant \Delta \cdot e^{2\pi n A} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \tag{39}$$

и мажорирует решение системы (12), о котором говорится в лемме, так что

$$\Delta \cdot |u_{jk}(t + h)| \leqslant \Delta \cdot e^{2\pi n A}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{40}$$

Из (40) получаем $|U(2\pi + h)| \leqslant \| e^{2\pi n A} \|$, а отсюда и из (38)

$$|B| \leqslant \| n e^{2\pi n A} \|, \tag{41}$$

и следовательно

$$|B_0| \leqslant \| n e^{2\pi n A} \|. \tag{42}$$

Для того чтобы оценить теперь s-ую степень матрицы B_0, напишем интерполяционную формулу Ньютона, применяя ее к функции ω^s.

* Оценка матрицы $|B_0^s|$ через модули ее характеристических чисел была уже дана в моей работе ([9]), где была доказана лемма, аналогичная этой. Для удобства читателя здесь приведена часть вывода.

Имеем

$$\begin{gathered} w^s = w_1^s + (w - w_1) f(w_1, w_2) + \ldots + \\ + (w - w_1) \ldots (w - w_{n-2}) f(w_1, \ldots, w_{n-1}) + \ldots + \\ + (w - w_1) \ldots (w - w_{n-1}) f(w_1, \ldots, w_n) + \ldots + \\ + (w - w_1) \ldots (w - w_{n-1}) \ldots (w - w_{s-1}) f(w_1, \ldots, w_s), \end{gathered} \tag{43}$$

где

$$f(w) = w^s, f(w_1, \ldots, w_{k-1}, w) = \frac{f(w_1, \ldots, w_{k-2}, w) - f(w_1, \ldots, w_{k-1})}{w - w_{k-1}}. \tag{44}$$

Из формулы (44) легко убедиться, что

$$f(w_1, \ldots, w_j) = \sum_{k_1 + \ldots + k_j = s-(j-1)} w_1^{k_1} w_2^{k_2} \ldots w_j^{k_j}, \tag{45}$$

где сумма берется по всевозможным комбинациям целых чисел $k_l \geqslant 0$, $l = 1, \ldots, j$, удовлетворяющих уравнению

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_j = s - (j - 1),$$

т. е. что $f(w_1, \ldots, w_j)$ есть однородный полином $s - (j - 1)$ измерения, от аргументов $w_1, \ldots, w_j$ с коэффициентами, равными единице. Формула (43) есть буквенное тождество.

Эта формула останется, очевидно, тождеством, если мы заменим букву w произвольной матрицей S, а буквы $w_1, \ldots, w_s$ какими-либо числами, так как правая часть этой формулы будет содержать только одну матрицу S, степени которой коммутируют.

Заменим в (43) букву w матрицей B_0, буквы $w_1, \ldots, w_{n-1}$ характеристическими числами $\rho_2, \ldots, \rho_n$, остальные буквы $w_n, \ldots, w_s$ заменим какими угодно числами.

В силу тождества Кейли

$$(B_0 - \rho_2 I)(B_0 - \rho_3 I) \ldots (B_0 - \rho_n I) \equiv 0 \tag{46}$$

формула (43) примет при этом вид

$$\begin{gathered} B_0^s = \rho_2^s I + (B_0 - \rho_2) f(\rho_2, \rho_3) + \ldots + \\ + (B_0 - \rho_2) \ldots (B_0 - \rho_{n-1}) f(\rho_2, \ldots, \rho_n), \end{gathered} \tag{47}$$

так как все остальные члены пропадут.

Теперь из формулы (47) и неравенств (36) и (42), поступая совершенно так же как в указанной выше работе [8], легко получается неравенство

$$|C| = |B_0^s| \leqslant \left\| e^{-2\pi s\beta} \frac{M^n - 1}{M - 1} \right\|, \tag{48}$$

где

$$M = s(n - 1)[1 + ne^{2\pi(\beta + nA)}]. \tag{49}$$

Неравенство (48) справедливо при $s \geqslant 1$, $n \geqslant 1$. Из (26), применяя неравенство Коши-Шварца, находим

$$\Delta_N^2 (2\pi s + h) \leqslant \sum_{k=2}^{n} C_k^2 \cdot \left\{ \sum_{j=2}^{n} \sum_{l=2}^{n} c_{jl}^2 \right\}.$$

Заменяя в этом неравенстве величины $|c_{jl}|$ правой частью неравенства (42), получаем искомое неравенство

$$\Delta_N^2 (2\pi s + h) \leqslant \Delta^2 (n - 1)^2 e^{-4\pi s\beta} \left(\frac{M^{n-1} - 1}{M - 1} \right)^2, \tag{50}$$

что и требовалось доказать.

§ 5

В силу неравенства (6) вместо времени t можно выбрать в уравнениях траектории K

$$x_j = \varphi_j(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

за параметр длину дуги траектории s, отсчитываемую от какой-либо точки. Радиус кривизны траектории $\rho(s)$ выражается формулой

$$\rho^2(s) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d^2 x_j}{ds^2} \right)^2}. \tag{51}$$

В силу тождеств

$$\frac{d\varphi_j}{dt} \equiv X_j(\varphi_1(t+h), \ldots, \varphi_n(t+h)), \quad j = 1, \ldots, n$$

неравенство (6) эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{\varphi}_j^2(t+h) \geqslant b^2 > 0, \quad 0 \leqslant t, \quad h \leqslant 2\pi. \tag{52}$$

Далее

$$ds = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \dot{\varphi}_j^2(t+h)}\, dt = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} X_j^2(\varphi_1(t+h), \ldots, \varphi_n(t+h))}\, dt.$$

Радиус кривизны в переменной t выражается формулой

$$\rho^2(t+h) = \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \big|_{\varphi(t+h)} \right]^4}{\sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{l=1}^{n} \left(X_l \frac{\partial X_k}{\partial x_l} \right)\Big|_{\varphi(t+h)} \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \big|_{\varphi(t+h)} - X_k \big|_{\varphi(t+h)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(X_j X_l \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \right)\Big|_{\varphi(t+h)} \right\}^2}. \tag{53}$$

В силу сделанных предположений 1° и 2° функции X_j, $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$ ограничены в области $\mathfrak{G}$

$$|X_j| \leqslant D, \quad \left| \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \right| \leqslant A, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{54}$$

Из формулы (53) и неравенств (54) получаем оценку снизу для радиуса кривизны траектории K:

$$\rho^2 \geqslant \frac{b^4}{n^3 A^2 D^2 (b^2 + nD^2)^2} = \omega^2. \tag{55}$$

Окружим теперь траекторию K окрестностью $U_\omega(K)$ (граница этой окрестности—тор, с радиусом сечения ω).

Если мы теперь в двух близких точках, взятых на траектории, соответствующих значениям параметра t и $t+\tau$, проведем нормальные к траектории гиперплоскости N_t и $N_{t+\tau}$, то все точки пересечения этих гиперплоскостей будут лежать вне области $U_\omega(K)$. Наименьшее расстояние всякой точки $\{\varphi(t+h)\} + \{z\} \in U_\omega(K)$ от точек траектории K будет выражаться вполне определенным единственным числом. Вектор, соединяющий точку $\{\varphi(t+h)\} + \{z\}$ с ближайшей точкой траектории K, будет лежать в некоторой нормальной к траектории гиперплоскости $N_{t+\tau}$.

Если Δ столь мало *, что вектор $\mathfrak{r}(2\pi s+h)$ принадлежит области $U_\omega(K)$, то вектор $\mathfrak{v}$, соединяющий конец вектора $\mathfrak{r}(2\pi s+h)$ с ближайшей точкой $\{\varphi(2\pi s+h+\tau)\}$ траектории K, будет лежать в нормальной к траектории гиперплоскости $N_{2\pi s+\tau+h}$ (или отбрасывая $2\pi s$, $N_{\tau+h}$). Поэтому соответствующее значение τ может быть найдено из условия ортогональности вектора $\mathfrak{v}$ с вектором касательной к траектории K в точке $\{\varphi(2\pi s+h+\tau)\}$, именно

$$(\mathfrak{v}, \sum_{k=1}^{n} \dot{\varphi}_k(2\pi s+h+\tau)\bar{e}_k)=0. \tag{56}$$

Но

$$\mathfrak{v}=\mathfrak{r}(2\pi s+h)-\chi, \tag{57}$$

где

$$\chi=\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(\tau+h)-\varphi_k(h)]\,\bar{e}. \tag{58}$$

Из (57), (58) и из выражения вектора $\mathfrak{r}(2\pi s+h)$ в ортах $\mathfrak{t}_1(h), \ldots, \mathfrak{t}_n(h)$, находим

$$\mathfrak{v}=\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k1}\cdot\mathfrak{t}_1(h)+\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k2}\cdot\mathfrak{t}_2(h)+\ldots+\sum_{k=2}^{n} C_k c_{kn}\mathfrak{t}_n(h)-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(\tau+h)-\varphi_k(h)]\,\bar{e}_k. \tag{59}$$

Из формул Тейлора имеем

$$\varphi_k(\tau+h)-\varphi_k(h)=\tau\dot{\varphi}_k(h)+\frac{\tau^2}{2}\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k\tau),\quad 0<\vartheta_k<1, \tag{60}$$

$$\dot{\varphi}_k(\tau+h)=\dot{\varphi}_k(h)+\tau\ddot{\varphi}_k(h+\theta_k\tau),\quad 0<\theta_k<1. \tag{60^1}$$

Обозначая для краткости

$$\sum_{k=1}^{n}[\dot{\varphi}_k(h)]^2=N^2 \tag{61}$$

и вспоминая определение вектора $\mathfrak{t}_1(h)$, можем, пользуясь (55) и (60), написать

$$\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(\tau+h)-\varphi_k(h)]\,\bar{e}_k=\tau N\,\mathfrak{t}_1(h)+\frac{\tau^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k\tau)\,\bar{e}_k. \tag{62}$$

Поэтому вектор $\mathfrak{v}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{v}=\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k1}-\tau N\right)\mathfrak{t}_1(h)+\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k2}\,\mathfrak{t}_2(h)+\ldots+\sum_{k=2}^{n} C_k c_{kn}\,\mathfrak{t}_n(h)-$$
$$-\frac{\tau^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k\tau)\,\bar{e}_k. \tag{63}$$

* Соответствующее неравенство для Δ мы здесь не приводим, хотя оно без труда может быть получено.

С помощью (60[1]) вектор χ можно представить в виде

$$\chi = \sum_{k=1}^{n} \dot{\varphi}_k(\tau + h)\bar{e}_k = N\,\mathfrak{t}_1(0) + \tau\sum_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}_k(h + \theta_k\tau). \qquad (64)$$

Составим теперь уравнение (56), перемножая скалярно правые части (63) и (64):

$$\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k1} - \tau N\right)\left[N + \tau\sum_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}_k(h + \theta_k\tau)\,(\bar{e}_k, \mathfrak{t}_1(h))\right] +$$

$$+ \tau\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k2}\right)\sum_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}_k(h + \theta_k\tau)\,(\bar{e}_k, \mathfrak{t}_2(h)) + \ldots +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \tau\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{kn}\right)\sum_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}_k(h + \theta_k\tau)\,(\bar{e}_k, \mathfrak{t}_n(h)) =$$

$$= \frac{1}{2}N\tau^2\sum_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}_k(h + \theta_k\tau)\,(\bar{e}_k, \mathfrak{t}_1(h)) + \frac{\tau^3}{2}\sum_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}_k(h + \theta_k\tau)\,\ddot{\varphi}_k(h + \theta_k\tau). \qquad (65)$$

Заметим, что

$$(\bar{e}_k, \mathfrak{t}_j(h)) = u_{jk}(h), \quad j, k = 1, \ldots, n,$$

и в силу ортогональности матрицы $U(h)$

$$|(\bar{e}_k, \mathfrak{t}_j(h))| = |u_{jk}(h)| \leqslant 1, \quad j, k = 1, \ldots, n. \qquad (66)$$

Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и из геометрических соображений очевидно, что при $\Delta(h)$ достаточно малом должен существовать (и при том единственный) корень τ уравнений (65), причем этот корень τ должен быть непрерывной функцией h. Из тех же соображений очевидно, что величина τ бесконечно мала вместе с Δ. Все эти утверждения можно доказать также с помощью теоремы о неявных функциях. С этой целью рассмотрим уравнение

$$B^s = U(2\pi s + h)\cdot U^{-1}(h).$$

Так как $D(U^{-1}(h)) \neq 0$ ни при каком конечном h и так как функции $u_{jk}(2\pi s + h)$, $u_{jk}(h)$, $j, k = 1, \ldots, n$, суть непрерывные функции h, заключаем, что элементы матрицы B^s являются непрерывными функциями h. Но $C = B^s$, следовательно, c_{jk} суть непрерывные функции h при любом конечном h.

Далее, функции $\varphi_j(t + h)$ и $\dot{\varphi}_j(t + h)$, $j = 1, \ldots, n$, как решения системы (12) и (15), также непрерывные функции h. Из тождеств

$$\ddot{\varphi}_j(t + h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{\varphi(t+h)} \cdot \dot{\varphi}_k(t + h), \quad j = 1, \ldots, n,$$

видим, что $\ddot{\varphi}_j(t + h)$ также непрерывные функции h, причем

$$|\ddot{\varphi}_j(t + h)| \leqslant nAD, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (67)$$

Из формулы Тейлора

$$\varphi_k(t+h)-\varphi_k(h)-t\dot{\varphi}_k(h)=\frac{t^2}{2}\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k t),$$

$$\dot{\varphi}_k(t+h)-\dot{\varphi}_k(h)=t\ddot{\varphi}_k(h+\theta_k t$$

убеждаемся, что правые части этих формул, так же как производные от них по t и h, суть непрерывные функции t и h, так как этим свойством обладают левые части. Положим

$$F(C_1,\ldots,C_n,h,\tau)\equiv\left(\sum_{k=2}^{n}C_k c_{k1}-\tau N\right)\left[N+\tau\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\theta_k\tau)u_{1k}(h)\right]+$$
$$+\tau\left(\sum_{k=2}^{n}C_k c_{k2}\right)\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\theta_k\tau)u_{2k}(h)+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\tau\left(\sum_{k=2}^{n}C_k c_{kn}\right)\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\theta_k\tau)u_{nk}(h)-$$
$$\frac{1}{2}N\tau^2\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k\tau)u_{1k}(h)-\frac{\tau^3}{2}\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\theta_k\tau)\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k\tau).$$

Функция $F(C_1,\ldots,C_n,h,\tau)$ в силу сказанного выше дифференцируема относительно $C_1,\ldots,C_n,\tau$ при любом конечном h. Кроме того, $F(0,\ldots,0,h,0)\equiv 0$, $\frac{\partial F}{\partial\tau}$ непрерывна относительно $\tau, h, C_1,\ldots,C_n$ и не равна нулю в окрестности точки $C_1=C_2=\ldots=C_n=\tau=0$ при любом конечном h. Следовательно, к уравнению (65)

$$F(C_1,\ldots,C_n,h,\tau)=0$$

применима теорема Joung'а о неявных функциях ([10]).

На этом основании мы можем утверждать, что при достаточно малых значениях $C_1,\ldots,C_n$ и любом h, уравнение (65) разрешимо относительно τ, причем это решение единственно и τ является непрерывной функцией $C_1,\ldots,C_n,h$.

Докажем теперь следующую лемму:

ЛЕММА. *Порядок бесконечно малой τ не может быть меньше порядка бесконечно малой Δ.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta}{\tau}=0$$

или что $\Delta=\tau\varepsilon$, где ε бесконечно малая вместе с Δ. Так как

$$\sum_{k=2}^{n}C_k^2=\Delta^2,\quad |C_k|\leqslant\Delta,$$

то $\lim\limits_{\Delta\to 0}|C_k|=0$, причем порядок бесконечно малой C_k не меньше порядка бесконечно малой Δ. Деля (65) на τ^2, переходя в правой части к пре-

делу и принимая во внимание (66), (67) и порядок малости C_k, заключаем, что

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n} C_k c_{k1} - \tau N}{\tau^2} = \text{const}, \tag{68}$$

откуда

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n} c_{k1}\frac{C_k}{\tau} - N}{\tau} = \text{const}. \tag{69}$$

Но левая часть (69) неограниченно растет при $\Delta \to 0$, следовательно, мы пришли к противоречию, и лемма доказана.

Перепишем теперь уравнение (65) следующим образом

$$\tau = \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k1} + \frac{1}{N^2 + \tau N \sum\limits_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}_k (h+\theta_k\tau) u_{1k}(h)} \times$$

$$\times\left\{\tau\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k2}\right)\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k (h+\theta_k\tau)\, u_{2k}(h) + \ldots +\right.$$

$$+\tau\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{kn}\right)\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k (h+\theta_k\tau)\, u_{nk}(h) - \frac{1}{2}N\tau^2\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k (h+\vartheta_k\tau)\, u_{1k}(h) -$$

$$\left.-\frac{\tau^3}{2}\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k (h+\theta_k\tau)\,\ddot{\varphi}_k (h+\vartheta_k\tau)\right\}. \tag{65^1}$$

Имеем

$$n^{\frac{1}{2}} D \geqslant N \geqslant b, \quad |C_k| \leqslant \Delta, \quad |c_{k1}| \leqslant n e^{2\pi n A}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{70}$$

Из (65^1) и неравенств (66), (67), (70) находим

$$|\tau| \leqslant \frac{(n-1)\, n e^{2\pi n A}}{b}\Delta + \Delta^2 (P + \omega), \tag{71}$$

где P — некоторая постоянная, а ω — бесконечно малая вместе с Δ. В силу непрерывности всех членов формулы (65^1) относительно h в промежутке $0 \leqslant h \leqslant 2\pi$, можем по теореме Вейерштрасса постоянную P и величину ω выбрать не зависящими от h.

На этих же основаниях из формулы (65) можно вывести неравенство

$$\left|\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k1} - \tau N\right| \leqslant \Delta^2 \cdot (Q + \varepsilon_1), \quad 0 \leqslant h \leqslant 2\pi, \tag{71^1}$$

где Q — некоторая постоянная, не зависящая от h, а ε_1 — бесконечно малая вместе с Δ, не зависящая от h.

Вычислим теперь длину v вектора $\mathfrak{v}$. Из формулы (63) находим

$$v^2=\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k1}-\tau N\right)^2+\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k2}\right)^2+\ldots+\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{kn}\right)^2-$$

$$-\tau^2\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k1}-\tau N\right)\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k\tau)\,u_{1k}(h)-$$

$$-\tau^2\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{k2}\right)\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k\tau)\,u_{2k}(h)-$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\tau^2\left(\sum_{k=2}^{n} C_k c_{kn}\right)\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}_k(h+\vartheta_k\tau)\,u_{nk}(h). \qquad (72)$$

Из (72) с помощью неравенств (71), (70), (67), (66), (48) выводим неравенство

$$v\leqslant\Delta\left[(n-1)\,e^{-2\pi s\beta}\,\frac{M^n-1}{M-1}+\varepsilon_2\right],\quad 0\leqslant h\leqslant 2\pi, \qquad (73)$$

где ε_2 — бесконечно малая вместе с Δ при любом конечном s, причем ее можно считать не зависящей от h.

§ 6

ЛЕММА. *Если в начальный момент $t=0$ изображающая точка $\{\xi(t+h)\}+\{\varphi(t+h)\}$ находится в гиперплоскости N_h на достаточно малом расстоянии Δ от траектории K, то в момент $t=2\pi S$, где S выбрано согласно неравенству*

$$(n-1)\,\frac{M^n-1}{M-1}\,e^{-2\pi S\beta}<\frac{1}{2^{\nu+1}}, \qquad (74)$$

расстояние v изображающей точки от траектории K удовлетворяет неравенству

$$v<\Delta\cdot 2^{-\nu}, \qquad (75)$$

где ν — любое целое положительное число.

Доказательство. Прежде всего, придавая в дальнейшем Δ те или иные значения, мы условимся считать их столь малыми, чтобы уравнение (65) имело единственное решение τ и чтобы неравенство (73) имело место.

Выберем S столь большим, чтобы соблюдалось неравенство (74)

$$(n-1)\,\frac{M^n-1}{M-1}\,e^{-2\pi S\beta}<\frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

Далее выберем Δ столь малым, чтобы

$$\varepsilon_2<\frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

Очевидно, что при таком выборе S и Δ неравенство (75) будет справедливо, что и требовалось доказать.

§ 7

Рассмотрим теперь, наряду с системой уравнений в вариациях

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t+h)\,\bar{z}_k, \tag{76}$$

измененную систему

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t+h)\,z_k + R_j(t+h, z_1, \ldots, z_n) + \varepsilon U_j(t, h, z_1, \ldots, z_n), \tag{77}$$

где U_j удовлетворяют следующим условиям:

1) функции $U_j(t, h, z_1, \ldots, z_n)$ непрерывны и ограничены в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant h \leqslant 2\pi$, $r(z, 0) \leqslant \eta$ *, именно

$$|U_j(t, h, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant 1;$$

2) кроме того U_j удовлетворяют в этой области условию Липшица

$$|U_j(t, h, z_1', \ldots, z_n') - U_j(t, h, z_1, \ldots, z_n)| \leqslant l \sum_{k=1}^{n} |z_k' - z_k|,$$

где l — постоянная.

Пусть $\{\varphi(t+h)\} \in A(\beta, \bar{g})$ и пусть указанное в условии 1) число η есть нижняя грань расстояний между двумя точками, принадлежащими соответственно границам γ и Γ областей g и $\mathfrak{G}$.

Решения систем (76) и (77), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, назовем «соответствующими» решениями.

Имеет место следующая

ЛЕММА. *Решения системы* (77) *отличаются от «соответствующих» решений системы* (76), *в промежутке* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi s$, *при условии, что*

$$\left.\begin{aligned} r(0) &< \frac{\xi}{2e^{2\pi sn(A+nL\eta)}}, \quad \xi \leqslant \eta, \\ \varepsilon &< \frac{n(A+nL\eta)\,\xi}{2\left[e^{2\pi sn(A+nL\eta)} - 1\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

не больше, чем на величину

$$\frac{[\varepsilon + n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{nA}\left[e^{2\pi sn(A+nL\eta+\varepsilon l)} - 1\right],$$

$$0 \leqslant h \leqslant 2\pi, \quad \mu = nL\xi, \quad \vartheta(s) = ne^{2\pi nAs},$$

т. е.

$$|z_j(t, h) - \bar{z}_j(t+h)| \leqslant \frac{[\varepsilon + n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{nA}\left[e^{2\pi sn(A+nL\eta+\varepsilon l)} - 1\right]$$

или

$$r[z(t, h), \bar{z}(t+h)] \leqslant \frac{[\varepsilon + n\vartheta(s)\,\mu r(0)]}{n^{\frac{1}{2}}A}\left[e^{2\pi sn(A+nL\eta+\varepsilon l)} - 1\right], \tag{79}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi s.$$

---

* Символом $r[z'(t), z(t)]$ мы обозначаем эвклидово расстояние между точками $\{z'(t)\}$ и $\{z(t)\}$. Символом $r(t)$ будем обозначать для краткости величину $r[z(t), 0]$.

Лемма эта доказывается с помощью метода последовательных приближений *

Применяя неравенства (79) и (78) к системе (11) и считая

$$U_j(t, h, z_1, \ldots, z_n) = Y_j(t, \varphi_1(t+h) + z_1, \ldots, \varphi_n(t+h) + z_n),$$

докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА. *Если в начальный момент* $t=0$ *изображающая точка* $\{z(t,h)\} + \{\varphi(t+h)\}$ *находится в гиперплоскости* N_h *на достаточно малом расстоянии* Δ *от траектории* K, *то в момент* $t = 2\pi S$, *где* S *удовлетворяет неравенству* (74), *расстояние* w *изображающей точки от траектории* K *удовлетворяет неравенству*

$$w \leqslant \Delta \cdot 2^{-(\nu-1)} + \delta,$$

где ν — *любое целое положительное число, а* $\delta > 0$ — *любое сколь угодно малое число.*

Доказательство. Сравним движение точки $\{z(t,h)\} + \{\varphi(t+h)\}$ с движением «соответствующей» точки $\{\bar{z}(t+h)\} + \{\varphi(t+h)\}$. Выберем сначала $r(h) = \Delta$ столь малым, чтобы одновременно соблюдались неравенства (74) и (79) в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi S$. На основании теоремы треугольника имеем

$$w < v + r(z, \bar{z}).$$

Подставляя в правую часть этого неравенства вместо v и $r(z, \bar{z})$ правые части неравенств (75) и (79) и помня, что $r(h) = \Delta$, получим

$$w < \Delta \cdot 2^{-\nu} + \frac{[\varepsilon + n\vartheta(S)\mu r(h)]}{nA}\left[e^{2\pi S n(A+nL\eta+\varepsilon l)} - 1\right] =$$

$$= \Delta\left[2^{-\nu} + \mu\frac{\vartheta(S)}{A}\left(e^{2\pi S n(A+nL\eta+\varepsilon l)} - 1\right)\right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{nA}\left(e^{2\pi S n(A+nL\eta+\varepsilon l)} - 1\right). \qquad (80)$$

Уменьшая теперь ξ и соответственно Δ, можно сделать μ сколь угодно малым. Следовательно, можно выбрать Δ и ε столь малыми, чтобы

$$\mu\frac{\vartheta(S)}{A}\left(e^{2\pi S n(A+nL\eta+l)} - 1\right) < 2^{-\nu},$$

$$\frac{\varepsilon}{nA}\left(e^{2\pi S n(A+nL\eta+l)} - 1\right) < \delta,$$

а тогда

$$w < \Delta \cdot 2^{-(\nu-1)} + \delta, \qquad (81)$$

что и требовалось доказать.

Так как неравенство (81 справедливо при любом $0 \leqslant h \leqslant 2\pi$, то из него вытекает, что, помещая в начальный момент точку $\{\varphi(t+h)\} + \{z(t,h)\}$ внутри достаточно малой окрестности $U_\omega(K)$ траектории K, можно добиться того, чтобы траектория точки $\{\varphi(t+h)\} + \{z(t,h)\}$ при всех $t \geqslant 0$ оставалась в любой наперед заданной окрестности $U_\alpha(K)$. А это и значит, что замкнутая траектория K положительно осуществима.

* Подробное доказательство этой леммы дано в работе ([1]).

Заметим в заключение, что движение $\{\varphi(t)\}$ не будет положительно осуществимым. Можно так подобрать функции Y_j, что точка $\{\varphi(t+h)\}+\{z(t,h)\}$, оставаясь в окрестности $U_\alpha(K)$, удалится от точки $\{\varphi(t+h)\}$ при t достаточно большом на конечное расстояние, как бы ни было мало ε.

Научно-иссл. институт математики и механики Ленингр. гос. университета.

Поступило 26. III. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Артемьев Н. А., Осуществимые движения, Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., (1939), № 3.
[2] Bohl P., Über Differentialungleichungen, Journ. für reine u. angew. Math., 144 (1914), S. 284—313.
[3] Четаев Н. Г., Об устойчивых траекториях динамики, Сборн. научн. труд. Казанск. А. И. № 5, 1936.
[4] Четаев Н. Г., Устойчивость и классические законы, Ibid., № 6.
[5] Andronow A., Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues, C. R., 189 (1929), p. 559.
[6] Андронов А. и др., Об устойчивости по Ляпунову, Журн. эксп. и теор. физики, т. 3, в. 5 (1933), стр. 373—74.
[7] Petrowsky, Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gevöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes, Матем. сборн. 41 : 1, (1934), стр. 107—155.
[8] Лаппо-Данилевский И. А., Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений, М. 1934, стр. 24.
[9] Artemieff N., Stabilité au sens de Liapounoff et nombre de solutions périodiques, Compos. Mathem., vol. 6, f. 1 (1938), p. 78—92.
[10] Ла Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, М. 1933, гл. IV, §§ 169, 170.

N. ARTEMIEFF. ÜBER REALISIERBARE TRAJEKTORIEN

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorhergehenden Arbeit ([1]) habe ich den Begriff der «realisierbaren» Bewegungen und der «realisierbaren» Trajektorien eingeführt und für eine Klasse periodischer Bewegungen ein hinreichendes Kriterium der Realisierbarkeit angegeben. In der vorliegenden Arbeit beweise ich ein hinreichendes Kriterium der Realisierbarkeit der Trajektorien für eine andere Klasse von periodischen Bewegungen.

In einem beschränkten Gebiet $\mathfrak{G}$ des n-dimensionalen Raumes $x_1, \ldots, x_n$ sei ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

gegeben. Die Funktionen X_j mögen den folgenden Bedingungen genügen:

I. X_j, $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, sind reell, eindeutig und stetig in dem abgeschlossenen Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}$.

II. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, genügen in $\overline{\mathfrak{G}}$ der Lipschitzbedingung

$$\left| \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{x'} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{x} \right| \leq L \sum_{k=1}^{n} | x_k' - x_k | ,$$

wo L eine Konstante bedeutet.

Betrachten wir zur Zeit $t = 0$ irgendein Punkt $\in \mathfrak{G}$. Infolge der gemachten Voraussetzungen wird diesen Anfangsbedingungen eine gewisse Lösung des Systems (1)

$$\{x\} = \{\varphi(t)\} \tag{2}$$

entsprechen. Wir setzen voraus, dass die Lösung (2) für alle $t \geq 0$ existiert und für diese Werte von t dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört.

Wir veranschauligen die Lösung (2) in dem $(n+1)$-dimensionalen Raum mit den Koordinaten $t, x_1, \ldots, x_n$. Dieser Lösung wird eine $(n+1)$-dimensionale Integralkurve entsprechen. Die η-Umgebung dieser Integralkurve, die den nicht-negativen t-Werten entspricht, bezeichnen wir mit $U_\eta(\{\varphi(t)\}^+)$. Die η-Umgebung der positiven Halbtrajektorie K^+ dieser Bewegung bezeichnen wir mit $U_\eta(K^+)$.

Gleichzeitig mit dem System (1) betrachten wir nun das variierte ystem

$$\frac{dy_j}{dt} = X_j(y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon Y_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

in welchem die Funktionen Y_j den folgenden Bedingungen genügen:

$Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ sind reell, eindeutig und stetig für $t \geq 0$, $\{y\} \in \overline{\mathfrak{G}}$ und in diesem Gebiet

$$| Y_j(t, y_1, \ldots, y_n) | \leq 1. \tag{4}$$

Ausserdem sollen die Funktionen Y_j in demselben Gebiet der Lipschitzbedingung

$$| Y_j(t, y_1', \ldots, y_n') - Y_j(t, y_1, \ldots, y_n) | \leq l \sum_{k=1}^{n} | y_k' - y_k | \tag{5}$$

genügen, wo l eine Konstante bedeutet.

Definition. Die Bewegung $\{\varphi(t)\}$ des Systems (1) ist positiv realisierbar, wenn für jedes noch so kleines $\delta > 0$ eine Zahl $\varepsilon(\delta) > 0$ gefunden werden kann, derart, dass die Bewegung $\{\psi(t)\}$ des variierten Systems (3), die den Anfangsbedingungen $\{\psi(0)\} = \{\varphi(0)\} + \{a\}$, wo $| a_j | \leq \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$, ist, genügt, für alle $t \geq 0$ existiert und den Ungleichungen

$$| \psi_j(t) - \varphi_j(t) | \leq \delta, \quad j = 1, \ldots, n,$$

genügt.

Definition. Die Halbtrajektorie K^+ der Bewegung $\{\varphi(t)\}$ ist positiv realisierbar, wenn für jedes noch so kleines $\delta > 0$ eine Zahl $\varepsilon(\delta) > 0$ gefunden werden kann, derart, dass die Halbtrajektorie L^+ der Bewegung $\{\psi(t)\}$ des variierten Systems der Umgebung $U_\delta(K^+)$ angehört.

Aus diesen Definitionen ersieht man, dass die Realisierbarkeit nichts anderes als Stabilität bezüglich der Störungen der Anfangsbedingungen, sowie der rechten Seiten der Gleichungen des Systems (1) ist.

Offenbar kann eine Bewegung, die bezüglich der Störungen εY_j einer bestimmten Klasse realisierbar ist, bezüglich der Störungen einer anderen Klasse unrealisierbar sein. Die Untersuchung der Realisierbarkeit einer Bewegung ist für die Anwendungen von Wichtigkeit. Illustrieren wir das an einem Beispiel aus der Himmelsmechanik.

Es existiert eine Gruppe von Asteroiden, die unter dem Namen der Trojaner bekannt ist, deren Bewegung derart geschieht, dass sie sich fortwährend * in der Nähe des Librationspunktes L_4 aufhalten. Die Frage, ob sich diese Asteroiden auch in der Zukunft immer in der Nähe dieses Punktes L_4 aufhalten werden, ist noch offen. Die Antwort auf diese Frage kann nicht aus der Untersuchung der Stabilität des Punktes L_4 im Sinne von Liapounoff erhalten werden, denn in der Tat wirken auf den Asteroid ausser dem Jupiter und der Sonne noch die anderen Planeten. Die Antwort auf diese Frage kann nur durch die Untersuchung der Realisierbarkeit des Gleichgewichtspunktes L_4 erfolgen.

Da, allgemein, in allen konkreten Problemen die rechten Seiten der Differentialgleichungen nur annähernd bekannt sind, kann eine im Sinne von Liapounoff stabile Bewegung sich in Wirklichkeit als unbeobachtbar erweisen **.

Wir kehren nun zu der Aufgabenstellung unserer Arbeit zurück. Sei $\bar{g} \subset \mathfrak{G}$ irgendein abgeschlossenes Gebiet. Wir setzen jetzt voraus, dass die Lösung $\{\varphi(t)\}$ periodisch mit der Periode 2π ist, und dass ihre Trajektorie $K \in \bar{g}$. Es sei, ferner,

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \geqslant b^2 > 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{6}$$

wo b^2 eine Konstante ist. Wir setzen

$$y_j = \varphi_j(t) + z_j(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

und bilden die Differentialgleichungen für $\{z\}$:

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi} \cdot z_k + R_j(t, z_1, \ldots, z_n) + \varepsilon Y_j(t, \varphi_1 + z_1, \ldots, \varphi_n + z_n). \tag{7}$$

Betrachten wir nun die Gleichungen in den Variationen:

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_{\varphi} \cdot \bar{z}_k, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Da die rechten Seiten des Systems (1) von der Zeit t explizit nicht abhängen, so muss bekanntlich einer der charakteristischen Exponenten der Lösung $\{\varphi(t)\}$ gleich Null sein. In der vorliegenden Arbeit beweise ich, dass falls alle anderen charakteristischen Exponenten negative Realteile besitzen, so ist die geschlossene Trajektorie K der periodischen Lösung $\{\varphi(t)\}$ positiv realisierbar.

---

* D. h. von dem Moment der Entdeckung bis zur Gegenwart.

** Die Theorie der realisierbaren Bewegungen ist bis zu einem gewissen Grade einer Aufgabe der stochastischen Theorie der dynamischen Systeme ähnlich.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

П. М. РИЗ

ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

(*Представлено академиком* **Н. Е. Кочиным**)

В статье исследуются деформации растяжения, изгиба и кручения естественно закрученных стержней и определяются возникающие при этом напряжения. Решаются задачи о растяжении равномерно закрученного стержня и некоторых неравномерно закрученных стержней силами, действующими в одном сечении, массовыми силами постоянной интенсивности. Рассматривается кручение и изгиб парами, действующими на конце. Изучаются также деформации естественно закрученных стержней переменного сечения.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются деформации естественно закрученных стержней, т. е. таких стержней, у которых в ненапряженном состоянии поперечные сечения повернуты друг относительно друга. Ось стержня, там, где это специально не оговорено, принимается прямолинейной и проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

Деформации таких стержней приходится изучать при расчете лопастей воздушных винтов, лопаток паровых турбин и лопастей вентиляторов; однако, несмотря на значительные требования к точности расчета таких ответственных элементов конструкций, как воздушный винт или лопатка турбины, в теории деформаций естественно закрученных стержней имеются существенные пробелы.

В том случае, когда линейные размеры поперечных сечений малы по сравнению с длиной стержня, так называемые тонкие стержни его деформации могут быть исследованы, исходя из общей теории тонких стержней Кирхгофа-Клебша. Однако в этой теории не могут исследоваться деформации поперечных сечений и распределение напряжений по сечению; кроме того, в этой теории фактически постулируется независимость кручения от растяжения и независимость крутильных деформаций от естественной закрученности. Первое утверждение с несомненностью опровергается опытом, указывающим на явление раскручивания стержня при его растяжении.

Явление раскручивания растянутого стержня впервые теоретически исследовалось в работе Вуда и Перринга ([1]) в частном случае эллиптического

сечения, однако дополнительные гипотезы, на которых основывались результаты Вуда и Перринга, противоречат основным положениям теории упругости, а именно, они предполагали, что при растяжении естественно закрученного стержня в деформированном сечении возникают касательные напряжения, как если бы стержень был первоначально не закручен, но зато подвержен действию скручивающей пары; нормальные напряжения в деформированном сечении предполагаются такими же, как при чистом растяжении. Однако, в силу линейности уравнений теории упругости, напряжения в любом сечении при одновременном действии крутящего момента и растягивающей силы получатся наложением напряжений от каждой из этих нагрузок в отдельности.

При рассмотрении деформаций изгиба в теории Кирхгофа-Клебша, кроме некоторых кинематических соотношений, опираются также на соотношения между компонентами кривизны и изгибающими моментами, представляющими собой обобщение известного соотношения Бернулли (2). Справедливость их доказана для тонких стержней, у которых в ненапряженном состоянии кривизна и закрученность так малы, что упругой деформацией, не выходящей за пределы пропорциональности, они могут быть переведены в незакрученное и неискривленное состояние.

В настоящей работе мы отказываемся от требования малости линейных размеров поперечного сечения по сравнению с его длиной в смысле Кирхгофа*, поэтому в указанном смысле наши результаты являются более общими, нежели результаты, вытекающие из теории Кирхгофа-Клебша. Мы не будем также пользоваться какими-либо гипотетическими предположениями о распределении напряжений.

Величину естественной закрученности мы так же, как и в теории Кирхгофа-Клебша, вынуждены считать малой, но, в отличие от последней теории, порядок малости естественной закрученности никак не связан с порядком малости упругих деформаций. Мы рассматриваем здесь растяжение, кручение и изгиб естественно закрученных стержней. Вначале мы ограничиваем свое рассмотрение стержнями, которые при раскрутке переходят в призматические; затем рассматриваем некоторые деформации естественно закрученных стержней переменного поперечного сечения.

§ 2. Общие соотношения

Мы называем естественно закрученным такой стержень, у которого в ненапряженном состоянии эллипсы инерции поперечных сечений повернуты друг относительно друга, но так, что плоскости их остаются параллельными.

Как уже указывалось во введении, ось стержня мы считаем прямолинейной и проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

---

* Нам придется, однако, пользоваться принципом Сен-Венана, который оправдывается не для всех тел, но хорошо применим, например, к телам, приближающимся к пластинкам.

Начало координат выберем в центре тяжести одного из сечений, оси x и y направим по главным осям этого сечения, а за ось z примем ось стержня. Поворот сечений относительно произвольно выбранного начального сечения определяем углом $\alpha(z)$. Наряду с этой системой координат рассмотрим местную систему ξ, η и ζ; оси ξ и η совпадают с главными осями каждого сечения, ось ζ совпадает с осью z и с осью стержня. Мы рассматриваем стержень естественно закрученный в отрицательном направлении отсчета углов. Легко получить следующие соотношения между основными и местными координатами:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = x\cos\alpha - y\sin\alpha, && x = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha, \\ &\eta = x\sin\alpha + y\cos\alpha, && y = -\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha, \\ &\zeta = z, && z = \zeta, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

а также соотношения между производными:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\xi} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial\eta}, \\ &\frac{\partial}{\partial y} = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\eta}, \\ &\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{d\alpha}{dz}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Уравнение боковой поверхности естественно закрученного стержня запишется следующим образом:

$$f(\xi, \eta) = 0, \tag{3}$$

либо

$$f(x\cos\alpha - y\sin\alpha;\ x\sin\alpha + y\cos\alpha) = 0. \tag{4}$$

Это означает, что после поворота всех сечений на угол $\alpha(z)$ наш стержень переходит в призматический.

Направляющие косинусы нормали к боковой поверхности $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ пропорциональны производным f'_x, f'_y и f'_z, а эти последние определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = f'_\xi\cos\alpha + f'_\eta\sin\alpha, \\ &\frac{\partial f}{\partial y} = -f'_\xi\sin\alpha + f'_\eta\cos\alpha, \\ &\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d\alpha}{dz}(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Основным исследуемым в настоящей работе является случай равномерной закрученности, когда

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(z) = \theta z, \\ &\frac{d\alpha}{dz} = \theta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(случай неравномерной естественной закрученности рассматривается в § 5).

Величину θ мы называем естественной круткой. Мы будем в настоящем исследовании считать эту величину малой (там, где специально не оговорено противное) и поставим себе задачей решение уравнений теории упругости с точностью до θ^2, сохраняя вследствие этого во всех

выкладках лишь величины первого порядка относительно θ. При этом формулы (1), (2) и (5) заменяются следующими:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = x - y\theta z, & x = \xi + \eta\theta z, \\ \eta = x\theta z + y, & y = -\xi\theta z + \eta, \\ \zeta = z, & z = \zeta, \end{array}\right\} \tag{1a}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \theta z \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \eta} - \theta z \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} + \theta\left(\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f'_\xi + f'_\eta \theta z, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f'_\eta - f'_\xi \theta z, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \theta\left(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi\right) \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

§ 3. Растяжение силой, приложенной па конце стержня

Рассмотрим задачу об упругом равновесии стержня под действием растягивающих усилий, равномерно распределенных на торце и статически эквивалентных силе P, параллельной оси стержня и приложенной в центре тяжести свободного торцевого сечения. Зададимся следующими выражениями для напряжений:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_{zz} = p + p\,\theta\,\sigma_{zz}^{(1)}, & \sigma_{xy} = p\,\theta\,\sigma_{xy}^{(1)}, \\ \sigma_{xx} = p\,\theta\,\sigma_{xx}^{(1)}, & \sigma_{xz} = p\,\theta\,\sigma_{xz}^{(1)}, \\ \sigma_{yy} = p\,\theta\,\sigma_{yy}^{(1)}, & \sigma_{yz} = p\,\theta\,\sigma_{yz}^{(1)}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Здесь $p = \frac{P}{S}$; S — площадь поперечного сечения; $\sigma_{xx}^{(1)}$ и пр. некоторые неизвестные величины, которые мы будем разыскивать как функции от координат ξ, η, ζ.

Напишем уравнения равновесия, пользуясь формулами (2), в которых с принятой точностью полагаем:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \theta z, \\ \cos\alpha &= 1; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

замечая, кроме того, что производные от $\sigma_{zz}^{(1)}$ и других дополнительных напряжений по координатам x, y, z мы вправе с принятой точностью считать равными производным по ξ, η, ζ, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(1)}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1)}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Пользуясь формулами (5), напишем условия, выражающие отсутствие напряжений на боковой поверхности

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{xy}^{(1)} f'_\eta = 0, \\ &\sigma_{xy}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yy}^{(1)} f'_\eta = 0, \\ &\sigma_{xz}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yz}^{(1)} f'_\eta + (\xi f'_\eta - \eta f'_\xi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

К этим уравнениям следует присоединить также условия совместности для добавочных напряжений; мы их, однако, здесь не выписываем, так как в данном случае они с принятой нами точностью сохраняют обычную форму.

Мы удовлетворим всем этим условиям, если примем

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{(1)} = \eta + k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \eta\right), \\ &\sigma_{yz}^{(1)} = -\xi + k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \xi\right), \\ &\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Здесь $\varphi(\xi, \eta)$ — функция кручения для профиля $f(\xi, \eta) = 0$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ и граничному условию

$$\varphi'_\xi f'_\xi + \varphi'_\eta f'_\eta = \frac{d}{ds}(\xi^2 + \eta^2)$$

на контуре сечения; k — некоторая константа, определяемая из требования равенства нулю крутящего момента в поперечном сечении:

$$\iint (x\sigma_{yz}^{(1)} - y\sigma_{xz}^{(1)})\, d\xi\, d\eta = \iint (\xi\sigma_{yz}^{(1)} - \eta\sigma_{xz}^{(1)})\, d\xi\, d\eta = 0\,^*. \tag{12}$$

Отсюда находим

$$k = \frac{J_p}{T},$$

где J_p — полярный момент инерции сечения, а T — его геометрическая жесткость на кручение. Легко убедиться в том, что в силу выбора начала координат в центре тяжести сечения и известных свойств функции кручения удовлетворяются также условия

$$\iint \sigma_{yz}^{(1)}\, d\xi\, d\eta = \iint \sigma_{xz}^{(1)}\, d\xi\, d\eta = 0,$$

откуда следует, что в поперечном сечении дополнительные напряжения статически эквивалентны нулю. По принципу Сен-Венана мы можем утверждать, что найденные напряжения действительно будут иметь место в сечениях, далеких от торцевого, если стержень растягивается силой P.

Приводим окончательные формулы для напряжений:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{zz} = \frac{P}{S} = p; \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \\ &\sigma_{xz} = p\theta\left\{\frac{J_p}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \eta\left(\frac{J_p}{T} - 1\right)\right\}, \\ &\sigma_{yz} = p\theta\left\{\frac{J_p}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \xi\left(\frac{J_p}{T} - 1\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

---

* Якобиан $\dfrac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = 1$, интегрирование распространено по площади торцевого сечения.

Несмотря на малую величину произведения $p\theta$, напряжения σ_{xz} и σ_{yz} могут быть все же весьма значительными, так как, выбирая профиль достаточно тонким, мы можем отношение $\frac{J_p}{T}$ сделать сколь угодно большим.

Приводим еще частный случай этих формул для стержня эллиптического сечения. Для эллиптического контура с полуосями a и b

$$\varphi(\xi, \eta) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\xi\eta; \quad \frac{J_p}{T} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2b^2},$$

и мы найдем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xz} &= p\,\theta\eta\,\frac{b^2 - a^2}{2b^2}, \\ \sigma_{yz} &= p\,\theta\xi\,\frac{b^2 - a^2}{2a^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Остановимся на случае, когда a много больше чем b; тогда при малых θ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{yz} &\approx 0, \\ \sigma_{xz} &\approx -p\,\theta\eta\,\frac{a^2}{2b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Касательные напряжения от растяжения достигают в этом случае наибольшего значения в вершинах малой оси эллипса и

$$(\sigma_{xz})_{\max} \approx \frac{p\theta a^2}{2b}. \tag{16}$$

Для перемещений мы обычными методами получаем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{J_p}{T} - 1\right) yz - \frac{\nu p}{E}x, \\ v &= \frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{J_p}{T} - 1\right) xz - \frac{\nu p}{E}y, \\ w &= \frac{p\theta}{\mu}\frac{J_p}{T}\varphi(\xi, \eta) + \frac{p}{E}z. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Здесь μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона; формулы для u и v выражают обычное сжатие, всегда сопровождающее осевое растяжение, и, кроме того, некоторую раскрутку стержня, причем величина этой раскрутки на единицу длины (обозначаемая нами τ) определяется формулой

$$\tau = \frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{J_p}{T} - 1\right). \tag{18}$$

По формуле Вуда и Перринга, выводившейся также с точностью до θ^2, следует

$$\tau = \frac{p\theta}{\mu}\frac{J_\xi - J_\eta}{T},$$

где J_ξ и J_η — главные моменты инерции сечения. Из сравнения с нашей формулой видно, что результат Вуда и Перринга приближенно справедлив для тонких сечений, для которых J_p очень близко к J_ξ, и величиной J_η, так же как и единицей, можно пренебречь по сравнению с $\frac{J_\xi}{T}$.

Естественно, что формула (18) приложима в том случае, когда упругие деформации малы и величина τ во всяком случае не превосходит величины θ.

Легко видеть, что перемена знака у p, т. е. замена растяжения сжатием, ведет к изменению знака у τ и, следовательно, раскрутка стержня при растяжении заменяется дальнейшим увеличением закручивания при сжатии.

Мы ограничились здесь выкладками с точностью до θ^2, однако точность может быть повышена и вся задача может быть решена с точностью до θ^3. Так как влияние членов второго порядка малости на окончательные результаты для напряжений и перемещений незначительно, то мы не излагаем этого вопроса в настоящей работе.

§ 4. Растяжение массовыми силами постоянной интенсивности

Представляет известный интерес рассмотрение случая растяжения массовыми силами. Простейшим будет случай постоянной интенсивности, который мы здесь излагаем.

Напряжение для незакрученного стержня определяется формулой

$$\sigma_{zz} = \rho z,$$

где ρ — интенсивность объемных сил, остальные компоненты напряжения равны нулю.

Мы задаемся следующими выражениями для напряжений:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{zz} = \rho\zeta + \rho\theta\sigma_{zz}^{(1)}, && \sigma_{xy} = \rho\theta\sigma_{xy}^{(1)},\\ &\sigma_{xx} = \rho\theta\sigma_{xx}^{(1)}, && \sigma_{xz} = \rho\theta\sigma_{xz}^{(1)},\\ &\sigma_{yy} = \rho\theta\sigma_{yy}^{(1)}, && \sigma_{yz} = \rho\theta\sigma_{yz}^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Уравнения равновесия для добавочных напряжений будут обычные:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\zeta} = 0,\\ &\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yy}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial\zeta} = 0,\\ &\frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{zz}^{(1)}}{\partial\zeta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Граничные условия на боковой поверхности:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{xy}^{(1)} f'_\eta = 0,\\ &\sigma_{xy}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yy}^{(1)} f'_\eta = 0,\\ &\sigma_{xz}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yz}^{(1)} f'_\eta + \zeta(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Уравнениям равновесия и третьему граничному условию мы удовлетворим, положив

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{(1)} = \eta\zeta + k\zeta(\varphi'_\xi - \eta),\\ &\sigma_{yz}^{(1)} = -\xi\zeta + k\zeta(\varphi'_\eta + \xi),\\ &\sigma_{xx}^{(1)} = \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} - \xi\eta - k(\varphi - \xi\eta),\\ &\sigma_{yy}^{(1)} = \frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \xi\eta - k(\varphi + \xi\eta),\\ &\sigma_{xy}^{(1)} = -\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Условиям совместности мы удовлетворим, если положим

$$\sigma_{zz}^{(1)} = 2k\varphi - \nabla^2\varphi + A\xi + B\eta + C \tag{23}$$

и выберем в качестве F бигармоническую функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla^4 F = 0. \tag{24}$$

Первые два граничные условия приводят к следующим условиям для функции F на контуре сечения:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} - \xi\eta - k(\varphi - \xi\eta)\right] f'_\xi - \frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta} f'_\eta = 0, \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta} f'_\xi + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \xi\eta - k(\varphi + \xi\eta)\right] f'_\eta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Постоянную k определяем так же, как и в предыдущем параграфе, из условия равенства нулю крутящего момента в поперечном сечении, и получаем для нее прежнее значение $\frac{J_p}{T}$. Постоянные A, B и C определяем из требования

$$\iint \sigma_{zz}^{(1)}\, d\xi\, d\eta = \iint \xi\,\sigma_{zz}^{(1)}\, d\xi\, d\eta = \iint \eta\,\sigma_{zz}^{(1)}\, d\xi\, d\eta = 0.$$

Перемещения слагаются: 1) из обычных перемещений, вызываемых растягивающими силами также и в незакрученном стержне, 2) некоторых перемещений, дающих плоскую деформацию, 3) перемещений, зависящих от констант A, B, C, и 4) перемещений, соответствующих раскручиванию стержня.

Последние перемещения имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\rho\theta}{\mu}\left(\frac{J_p}{T} - 1\right)\frac{yz^2}{2}, \\ v &= \frac{\rho\theta}{\mu}\left(\frac{J_p}{T} - 1\right)\frac{xz^2}{2}, \\ w &= \frac{\rho\theta}{\mu}\frac{J_p}{T}\varphi(\xi, \eta)\, z. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Для раскрутки получим следующую формулу:

$$\tau = \frac{\rho\theta}{\mu}\left(\frac{J_p}{T} - 1\right) z. \tag{27}$$

Обычные перемещения от растяжения:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\nu\rho}{E} xz, \\ v &= -\frac{\nu\rho}{E} yz, \\ w &= \frac{\rho}{2E}(z^2 - l^2) + \frac{\nu\rho}{2E}(x^2 + y^2). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Плоская деформация и напряжения σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}, σ_{zz} легко определяются для некоторых простых контуров. Мы доведем решение задачи до численного результата для стержня с эллиптическим поперечным сечением.

В этом случае

$$f(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1, \tag{29}$$

константа

$$k = \frac{J_p}{T} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2}, \tag{30}$$

$$\varphi(\xi, \eta) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\xi\eta; \tag{31}$$

функцию F мы будем разыскивать в виде

$$F = C_1 \xi \eta + C_2 \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} \right) \xi \eta. \tag{32}$$

Выбранная таким образом функция удовлетворяет уравнению $\nabla^4 F = 0$, а из граничных условий после некоторых простых вычислений мы найдем

$$C_1 = \frac{a^2 - b^2}{6}, \quad C_2 = \frac{a^2 - b^2}{12}. \tag{33}$$

Для напряжений получим следующие окончательные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0, & \sigma_{xy} &= \frac{\rho\theta}{4} (a^2 - b^2) \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right), \\ \sigma_{yy} &= 0, & \sigma_{xz} &= \rho\theta\zeta \frac{b^2 - a^2}{2b^2} \eta, \\ \sigma_{zz} &= \rho z + \rho\theta \frac{3}{4} \frac{b^4 - a^4}{a^2 b^2} \xi\eta, & \sigma_{yz} &= \rho\theta\zeta \frac{b^2 - a^2}{2a^2} \xi. \end{aligned} \right\} \tag{34}$$

Для такого эллипса, у которого $a \gg b$, весьма значительными будут касательные напряжения σ_{xz}, если же $b \gg a$, то основным касательным напряжением будет напряжение σ_{yz}. Напряжение σ_{xy} в этих случаях мало, либо по сравнению с σ_{xz} или σ_{yz}, если только одна из полуосей эллипса не становится по размерам сравнимой с длиной стержня; в последнем случае напряжение σ_{xy} также может стать весьма значительным.

Наконец, приводим полную систему перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\nu\rho}{E} xz - \frac{\rho\theta}{\mu} \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2 b^2} y \frac{z^2}{2} + \frac{\rho\theta}{\mu} \left(\frac{a^2 - b^2}{12 b^2} y^3 - \frac{a^2 - b^2}{8} y \right), \\ v &= -\frac{\nu\rho}{E} yz + \frac{\rho}{\mu} \theta \frac{(a^2 - b^2)}{4a^2 b^2} x \frac{z^2}{2} + \frac{\rho\theta}{\mu} \left(\frac{a^2 - b^2}{12a^2} x^3 - \frac{a^2 - b^2}{8} y \right), \\ w &= \frac{\rho}{2E} (z^2 - l^2) + \frac{\nu\rho}{2E} (x^2 + y^2) + \frac{\rho\theta}{\mu} \frac{b^4 - a^4}{4a^2 b^2} xyz. \end{aligned} \right\} \tag{35}$$

§ 5. Случай переменной естественной крутки

Рассмотрим случай, когда угол поворота в сечении в ненапряженном состоянии определяется следующим законом:

$$\alpha(z) = \theta_1 \frac{z^2}{2} \tag{36}$$

и крутка

$$\frac{d\alpha}{dz} = \theta_1 z. \tag{37}$$

Задаемся напряжениями, соответствующими растяжению стержня силами, действующими на его конце:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= p + p\theta_1 \sigma_{zz}^{(1)}, & \sigma_{xy} &= p\theta_1 \sigma_{xy}^{(1)}, \\ \sigma_{xx} &= p\theta_1 \sigma_{xx}^{(1)}, & \sigma_{xz} &= p\theta_1 \sigma_{xz}^{(1)}, \\ \sigma_{yy} &= p\theta_1 \sigma_{yy}^{(1)}, & \sigma_{yz} &= p\theta_1 \sigma_{yz}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

Составим уравнения равновесия и граничные условия. Для добавочных напряжений получим:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\zeta}=0,\\&\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yy}^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial\zeta}=0,\\&\frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(1)}}{\partial\zeta}=0;\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xx}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{xy}^{(1)}f'_\eta=0,\\&\sigma_{xy}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{yy}^{(1)}f'_\eta=0,\\&\sigma_{xz}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{yz}^{(1)}f'_\eta+\zeta(\xi f'_\eta-\eta f'_\xi)=0.\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

Уравнения равновесия, так же как и условия на свободной поверхности, полностью совпадают с уравнениями (20) и (21) § 4 и, следовательно, для напряжений и перемещений можно переписать оттуда соответствующие выражения с заменой $p\theta$ на $p\theta_1$.

Таким путем получим:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xz}=p\theta_1\{\eta\zeta+k\zeta(\varphi'_\xi-\eta)\},\\&\sigma_{yz}=p\theta_1\{-\xi\zeta+k\zeta(\varphi'_\eta+\xi)\},\\&\sigma_{xx}=p\theta_1\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}-\xi\eta-k(\varphi-\xi\eta)\right\},\\&\sigma_{yy}=p\theta_1\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}+\xi\eta-k(\varphi+\xi\eta)\right\},\\&\sigma_{xy}=-p\theta_1\frac{\partial^2F}{\partial\xi\,\partial\eta},\\&\sigma_{zz}=p+p\theta_1\{2k\varphi-\nabla^2F+A\xi+B\eta+C\}\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

и далее

$$\left.\begin{aligned}&u=-\frac{\nu p}{E}x-\frac{p\theta_1}{\mu}\left(\frac{J_p}{T}-1\right)\frac{yz^2}{2}+p\theta_1\bar{u}(x,y)-p\theta_1\frac{A}{4\mu}z^2,\\&v=-\frac{\nu p}{E}y+\frac{p\theta_1}{\mu}\left(\frac{J_p}{T}-1\right)\frac{xz^2}{2}+p\theta_1\bar{v}(x,y)-p\theta_1\frac{B}{4\mu}z^2,\\&w=\frac{p}{E}z+\frac{p\theta_1}{\mu}\frac{J_p}{T}\varphi(\xi,\eta)z+p\theta_1\bar{w}(x,y)+p\theta_1\left(\frac{Ax+By+C}{2\mu}\right),\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

$$\tau=\frac{p}{\mu}\left(\frac{J_p}{T}-1\right)\theta_1 z=\frac{p}{\mu}\left(\frac{J_p}{T}-1\right)\frac{d\alpha}{dz}.\tag{43}$$

Обозначения те же, что и в § 4; $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{w}$ — перемещения, соответствующие плоской деформации и не влияющие на раскрутку.

Без труда можно рассмотреть также случай, когда

$$\alpha(z)=\theta z+\frac{\theta_1 z^2}{2}\tag{44}$$

и

$$\frac{d\alpha}{dz}=\theta+\theta_1 z.\tag{45}$$

В этом случае дополнительные напряжения и перемещения получаются наложением соответствующих величин для задачи с постоянной круткой и с круткой θz. Мы не приводим полностью всех окончательных резуль-

татов (они легко могут быть получены сопоставлением соответствующих формул § 3 и § 4) и даем здесь только формулу для раскрутки

$$\tau = \frac{p}{\mu}\left(\frac{J_p}{T} - 1\right)(\theta + \theta_1 z) = \frac{p}{\mu}\left(\frac{J_p}{T} - 1\right)\frac{d\alpha}{dz}. \tag{46}$$

§ 6. Кручение естественно закрученных стержней

Мы уже указывали во введении, что в теории тонких стержней Кирхгофа постулируется независимость крутильных деформаций от естественной закрученности; в этом параграфе мы рассмотрим кручение естественно закрученного стержня под действием нагрузок, приложенных к торцевым сечениям стержня и создающих крутящий момент. Как и в теории Сен-Венана, мы считаем, что эти нагрузки распределены по торцу, так же как и в каждом сечении, и задаем только M_0 — момент пары, статически эквивалентной нашим нагрузкам. Мы ограничиваемся случаем равномерной закрученности:

$$\alpha(z) = \theta z.$$

Чтобы избежать некоторых затруднений в условиях совместности, мы будем исходить из выражений для перемещений и зададимся перемещениями, соответствующими перемещениям незакрученного стержня, с некоторыми искомыми добавками — функциями от ξ, η, ζ.

Итак, положим

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau y z + \tau\theta u^{(1)}, \\ v &= \tau x z + \tau\theta v^{(1)}, \\ w &= \tau\varphi(\xi, \eta) + \tau\theta w^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$\left(\text{здесь } \tau_0 = \frac{\mu_0}{\mu T}\right.$ и μT — жесткость на кручение соответствующего призматического стержня$\Big)$.

Определим компоненты деформации по известным формулам

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

воспользовавшись при этом дифференциальными соотношениями (2). Затем по формулам, связывающим компоненты деформации с напряжениями, найдем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\tau\theta H + \tau\theta\sigma_{xx}^{(1)}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda\tau\theta H + \tau\theta\sigma_{yy}^{(1)}, \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\tau\theta H + \tau\theta\sigma_{zz}^{(1)}, \\ \sigma_{xy} &= \tau\theta\sigma_{xy}^{(1)}, \\ \sigma_{xz} &= \mu\tau(\varphi'_\xi - y) + \mu\theta\tau z\varphi'_\eta + \theta\tau\sigma_{xz}^{(1)}, \\ \sigma_{yz} &= \mu\tau(\varphi'_\eta + x) - \mu\theta\tau z\varphi'_\xi + \tau\theta\sigma_{yz}^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Здесь λ и μ — константы Ламе, $H = \xi\varphi'_\eta - \eta\varphi'_\xi$, $\sigma_{xx}^{(1)}$, $\sigma_{xy}^{(1)}$ и т. д. — неизвестные дополнительные напряжения.

Снова применяя формулы (2), напишем уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\zeta}+(\lambda+\mu)\frac{\partial H}{\partial\xi}=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yy}^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial\zeta}+(\lambda+\mu)\frac{\partial H}{\partial\eta}=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(1)}}{\partial\zeta}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{xy}^{(1)}f'_\eta+\lambda Hf'_\xi+\mu(\varphi'_\xi-\eta)(\xi f'_\eta-\eta f'_\xi)=0,\\
&\sigma_{xy}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{yy}^{(1)}f'_\eta+\lambda Hf'_\eta+\mu(\varphi'_\eta+\xi)(\xi f'_\eta-\eta f'_\xi)=0,\\
&\sigma_{xz}^{(1)}f'_\xi+\sigma_{yz}^{(1)}f'_\eta=0.
\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

Эти уравнения формально соответствуют некоторой задаче об упругом равновесии под действием системы объемных и поверхностных сил. Условия совместности для такой задачи могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_{xx}^{(1)}+\frac{\partial^2\Sigma^{(1)}}{\partial\xi^2}\cdot\frac{1}{1+\nu}=-2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2H}{\partial\xi^2},\\
&\nabla^2\sigma_{yy}^{(1)}+\frac{\partial^2\Sigma^{(1)}}{\partial\eta^2}\cdot\frac{1}{1+\nu}=-2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2H}{\partial\eta^2},\\
&\nabla^2\sigma_{zz}^{(1)}+\frac{\partial^2\Sigma^{(1)}}{\partial\zeta^2}\cdot\frac{1}{1+\nu}=0,\\
&\nabla^2\sigma_{xy}^{(1)}+\frac{\partial^2\Sigma^{(1)}}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\frac{1}{1+\nu}=-2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2H}{\partial\xi\,\partial\eta},\\
&\nabla^2\sigma_{xz}^{(1)}+\frac{\partial^2\Sigma^{(1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\cdot\frac{1}{1+\nu}=0,\\
&\nabla^2\sigma_{yz}^{(1)}+\frac{\partial^2\Sigma^{(1)}}{\partial\eta\,\partial\zeta}\cdot\frac{1}{1+\nu}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

где

$$\Sigma^{(1)}=\sigma_{xx}^{(1)}+\sigma_{yy}^{(1)}+\sigma_{zz}^{(1)}.$$

Попытаемся удовлетворить всем написанным условиям, положив:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{xz}^{(1)}=0,\\
&\sigma_{yz}^{(1)}=0,\\
&\sigma_{xx}^{(1)}=-(\lambda+\mu)H+\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2},\\
&\sigma_{yy}^{(1)}=-(\lambda+\mu)H+\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2},\\
&\sigma_{zz}^{(1)}=\nu(\sigma_{xx}^{(1)}+\sigma_{yy}^{(1)})+\sigma_{zz}^{(0)},\\
&\sigma_{xy}^{(1)}=-\frac{\partial^2F}{\partial\xi\,\partial\eta},
\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

где $\sigma_{zz}^{(0)}$ зависит только от ξ и η и F — также некоторая пока неизвестная функция от ξ и η. Введем еще обозначение

$$\sigma_{xx}^{(1)}+\sigma_{yy}^{(1)}=\Sigma^{(0)}.\tag{53}$$

Тогда

$$\sigma_{zz}^{(1)}=\nu\Sigma^{(0)}+\sigma_{zz}^{(0)},\quad \Sigma^{(0)}=-2(\lambda+\mu)H+\nabla^2F.\tag{54}$$

При сделанных предположениях тождественно удовлётворяются все условия равновесия, третье граничное условие, а также два последних условия совместности. Первые четыре условия совместности при учете того, что

$$\nabla^2 H = 0,$$

дают

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^4 F = 0, \\ &\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(0)}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

откуда

$$\sigma_{zz}^{(0)} = A\xi + B\eta + C,$$

и, следовательно,

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \nu \nabla^2 F - 2(\lambda + \mu)\nu H + A\xi + B\eta + C.$$

Постоянные A, B, C определяются из следующего требования: нагрузки в торцевом сечении должны быть эквивалентны крутящей паре, откуда

$$\left.\begin{aligned} &\iint \sigma_{zz}\, d\xi\, d\eta = 0, \\ &\iint \xi\sigma_{zz}\, d\xi\, d\eta = 0, \\ &\iint \eta\sigma_{zz}\, d\xi\, d\eta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

(интегрирование распространено на площадь торцевого сечения).

Заметим также, что удовлетворяются следующие условия в поперечном сечении:

$$\iint \sigma_{xz}\, d\xi\, d\eta = \iint \sigma_{yz}\, d\xi\, d\eta = \iint x\sigma_{yz}\, d\xi\, d\eta = \iint y\sigma_{xz}\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (57)$$

и

$$\iint (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})\, d\xi\, d\eta = M_0. \qquad (58)$$

Для полного определения функции F необходимо еще учесть два первых граничных условия, которые перейдут в следующие контурные условия для функции F:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - (\lambda + \mu) H\right] f'_\xi - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi\, \partial \eta} f'_\eta + \lambda H f'_\xi + \mu(\varphi'_\xi - \eta)(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi) = 0, \\ &-\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\, \partial \eta} f'_\xi + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - (\lambda + \mu) H\right] f'_\eta + \lambda H f'_\eta + \mu(\varphi'_\eta + \xi)(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Возвращаясь к напряжениям, мы можем установить, что касательные напряжения в поперечном сечении определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \mu\tau(\varphi'_\xi - \eta) + \mu\tau\theta z(\varphi'_\eta + \xi), \\ \sigma_{yz} &= \mu\tau(\varphi'_\eta + \xi) - \mu\tau\theta z(\varphi'_\xi - \eta). \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Остальные напряжения выражаются через функцию F; важно отметить, что все эти напряжения не зависят от z и соответствуют некоторому плоскому напряженному состоянию

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\tau\theta\left\{\mu H + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right\}, \\
\sigma_{yy} &= -\tau\theta\left\{\mu H + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right\}, \\
\sigma_{xy} &= -\tau\theta\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}, \\
\sigma_{zz} &= \tau\theta\left\{\nu\nabla^2 F + A\xi + B\eta + C\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Для перемещений найдем

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\tau yz + \tau\theta\left(\bar{u}(\xi, \eta) - \frac{A}{4\mu}z^2\right), \\
v &= \tau xz + \tau\theta\left(\bar{v}(\xi, \eta) - \frac{B}{4\mu}z^2\right), \\
w &= \tau\varphi(\xi, \eta) + \tau\theta z\cdot\left(\frac{A\xi + B\eta}{2\mu} + \alpha\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

$$\alpha = \frac{C}{2\mu}.$$

Из того, что $\bar{u}$ и $\bar{v}$ представляют плоскую деформацию, следует, что они не влияют на крутку, которая сохраняет таким образом то же значение, что и в классической теории кручения призматического стержня. В силу условия

$$\iint (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})\,dx\,dy = M, \qquad (63)$$

о котором уже упоминалось ранее, мы получаем классическую зависимость между круткой и крутящим моментом

$$M = \mu\tau\iint (\xi^2 + \eta^2 + \xi\varphi'_\eta - \eta\varphi'_\xi)\,d\xi\,d\eta \qquad (64)$$

с сохранением обычной формулы для геометрической жесткости

$$T = \iint (\xi^2 + \eta^2 + \xi\varphi'_\eta - \eta\varphi'_\xi)\,d\xi\,d\eta. \qquad (65)$$

Таким образом, перемещения слагаются: 1) из обычного кручения, 2) некоторой дополнительной «плоской» деформации, определяемой функциями $\bar{u}$, $\bar{v}$, 3) осевого растяжения или сжатия, характеризуемого константой α, причем сжатие имеет место в том случае, когда упругое кручение направлено в ту же сторону, что и естественная закрученность, 4) некоторого дополнительного искажения поперечных сечений, зависящих от z. Чтобы получить изученную здесь деформацию, следует определенным образом распределить по торцевому сечению внешние силы; мы полагаем, однако, согласно принципу Сен-Венана, что в случае иного распределения сил отклонения от найденной деформации будут иметь характер местных возмущений.

Интересно отметить также известное сходство между деформацией кручения естественно закрученного стержня и так называемой большой деформацией кручения, т. е. деформацией, при которой нельзя уже пользоваться линейными соотношениями теории упругости.

При такого рода деформациях, изученных автором настоящей работы для круглого цилиндра ([3]) и Д. Ю. Пановым ([4]) для эллиптического цилиндра, закручивание также сопровождается осевым сжатием и некоторыми добавочными деформациями, по характеру схожими с добавочными деформациями, возникающими при кручении естественно закрученного стержня.

В этой связи интересно отметить, что энергия деформации с точностью до θ^2 определяется в нашем случае величиной

$$A = \frac{\mu}{2}\tau^2 T + \tau \iint \sigma_{zz} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Легко показать, что для контуров, обладающих центром симметрии, последний интеграл равен нулю, если начало координат совпадает с центром симметрии.

§ 7. Изгиб естественно закрученного стержня парами, приложенными на конце

Будем исходить из напряжений, возникающих при чистом изгибе призматического стержня. При этом, если плоскость изгиба есть главная плоскость xOz, то

$$\sigma_{xz} = -\beta E x,$$

где $\beta = \frac{M}{EJ_y}$, M — момент изгибающей пары, J_y — момент инерции поперечного сечения относительно главной оси (y).

Остальные напряжения в призматическом стержне равны нулю. Мы ограничимся случаем равномерно закрученного стержня и зададимся следующими напряжениями:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\beta E x + \beta\theta\sigma_{zz}^{(1)}, & \sigma_{xy} &= \beta\theta\sigma_{xy}^{(1)}, \\ \sigma_{xx} &= \beta\theta\sigma_{xx}^{(1)}, & \sigma_{xz} &= \beta\theta\sigma_{xz}^{(1)}, \\ \sigma_{yy} &= \beta\theta\sigma_{yy}^{(1)}, & \sigma_{yz} &= \beta\theta\sigma_{yz}^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Теми же методами, что и в предыдущих параграфах, составляем уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\zeta} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yy}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial\zeta} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{zz}^{(1)}}{\partial\zeta} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Условия на боковой поверхности:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{xy}^{(1)} f'_\eta = 0, \\ &\sigma_{xy}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yy}^{(1)} f'_\eta = 0, \\ &\sigma_{xz}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yz}^{(1)} f'_\eta - E\xi(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Мы видим, что задача определения дополнительных напряжений $\sigma_{xx}^{(1)}$ и пр. формально соответствует задаче об упругом равновесии под действием поверхностных сил.

Сформулируем также условия на свободном торцевом сечении. Пусть торцевое сечение характеризуется значением $z=0$ и в этом сечении напряжения статически эквивалентны изгибающей паре, действующей в плоскости xOz, совпадающей на данном сечении с плоскостью $\xi O\zeta$ (угол $\alpha=0$). Момент пары M и вектор момента параллельны оси z.

Для этого требуем, чтобы в сечении $z=0$

$$\left.\begin{aligned}
&\iint \sigma_{zz}\,d\xi\,d\eta=0,\\
&\iint \xi\sigma_{zz}\,d\xi\,d\eta=M,\\
&\iint \eta\sigma_{zz}\,d\xi\,d\eta=0,\\
&\iint \sigma_{xz}\,d\xi\,d\eta=0,\\
&\iint \sigma_{yz}\,d\xi\,d\eta=0,\\
&\iint (\xi\sigma_{yz}-\eta\sigma_{xz})\,d\xi\,d\eta=0.
\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Всем перечисленным условиям попробуем удовлетворить следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{(1)}=\sigma_{xy}^{(1)}=\sigma_{yy}^{(1)}=0,\\
&\sigma_{xz}^{(1)}=-E\xi\eta+\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\sigma_{xz}^{(2)},\\
&\sigma_{yz}^{(1)}=B\xi^2+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\sigma_{yz}^{(2)},\\
&\sigma_{zz}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(2)},
\end{aligned}$$

где $\psi=\psi(\xi,\eta)$.

Мы покажем, что можем выбрать функцию ψ и константу B так, чтобы удовлетворить уравнениям равновесия, условиям совместности и условиям на боковой поверхности. При этом могут остаться невыполненными условия на свободном сечении; последние мы удовлетворим за счет напряжений $\sigma_{xz}^{(2)}$, $\sigma_{yz}^{(2)}$ и $\sigma_{zz}^{(2)}$, для которых получим уже, таким образом, некоторую задачу об упругом равновесии в отсутствии массовых сил на боковой поверхности.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\begin{aligned}
&\bar\sigma_{xz}=-E\xi\eta+\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\\
&\bar\sigma_{yz}=B\xi^2+\frac{\partial\psi}{\partial\eta},
\end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xz}^{(1)}=\bar\sigma_{xz}+\sigma_{xz}^{(2)},\\
&\sigma_{yz}^{(1)}=\bar\sigma_{yz}+\sigma_{yz}^{(2)}.
\end{aligned}$$

При сделанных предположениях первые два уравнения равновесия дают

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(2)}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{zz}^{(2)}}{\partial\zeta}=0.$$

Из третьего уравнения находим:

$$\nabla^2\psi-E\eta=0, \tag{70}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(2)}}{\partial\zeta}=0. \tag{71}$$

Часть условий совместности выполняется автоматически, остальные дают

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\sigma_{xz}^{(2)} + \frac{1}{1+\nu}\,\frac{\partial^2\sigma_{zz}^{(2)}}{\partial\xi\,\partial\zeta} = 0,\\ &\nabla^2\sigma_{yz}^{(2)} + \frac{1}{1+\nu}\,\frac{\partial^2\sigma_{zz}^{(2)}}{\partial\eta\,\partial\zeta} = 0,\\ &\nabla^2\sigma_{zz}^{(2)} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

и затем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\xi}\,\nabla^2\psi = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial\eta}\,\nabla^2\psi + 2B = 0. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Последнее условие и условие (70) совместны, если

$$B = -\frac{E}{2}\,.$$

Перейдем к условиям на боковой поверхности; из них, с учетом только что найденного значения B, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}f'_\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}f'_\eta - \frac{3}{2}\,E\xi^2 f'_\eta = 0 \tag{74}$$

и, кроме того,

$$\sigma_{xz}^{(2)} f'_\xi + \sigma_{yz}^{(2)} f'_\eta = 0. \tag{75}$$

Итак, для функций ψ мы получили следующие требования: внутри контура $f(\xi, \eta) = 0$ она удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi - E\eta = 0 \tag{76}$$

и на контуре требованию

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}f'_\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}f'_\eta - \frac{3}{2}\,E\xi^2 f'_\eta = 0. \tag{77}$$

Задача определения функции, удовлетворяющей написанным выше требованиям, весьма сходна с задачей отыскания так называемой функции изгиба и может быть разрешена для многих простых контуров, так, например, для эллипса

$$\psi = E\left\{\frac{1}{4}\,\xi\eta^2 - \frac{1}{4}\,\eta^3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2 + 2b^2 - \frac{3}{4}(b^2 - a^2)}{a^2 + 3b^2}\cdot(\eta^3 - 3\xi^2\eta) - \right.$$
$$\left. - \frac{b^2\cdot(a^2 - b^2)}{a^2 + 3b^2}\,\eta\right\}. \tag{78}$$

Для того чтобы перейти к определению $\sigma_{xz}^{(2)}$, $\sigma_{yz}^{(2)}$ и $\sigma_{zz}^{(2)}$, вычислим $\iint \bar{\sigma}_{xz}\,d\xi\,d\eta$ и $\iint \bar{\sigma}_{yz}\,d\xi\,d\eta$:

$$\iint \bar{\sigma}_{yz}\,d\xi\,d\eta = \iint\left\{\bar{\sigma}_{yz} + \eta\cdot\left(\frac{\partial\bar{\sigma}_{xz}}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{yz}}{\partial\eta}\right)\right\}d\xi\,d\eta =$$
$$= E\cdot\oint \xi\eta\cdot(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi)\,ds = E\cdot\oint(\xi^2\eta\,d\xi + \xi\eta^2\,d\eta) =$$
$$= E\cdot\iint(\xi^2 - \eta^2)\,d\xi\,d\eta = E\cdot(J_\eta - J_\xi),$$
$$\iint \bar{\sigma}_{xz}\,d\xi\,d\eta = E\oint \xi^2(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi)\,ds = E\oint(\xi^3 d\xi + \xi^2\eta\,d\eta) =$$
$$= 2E\iint \xi\eta\,d\xi\,d\eta = 0$$

(если ξ и η — главные оси изгиба).

Теперь легко установить условия в сечении $z=0$ для напряжений $\sigma_{xz}^{(2)}$, $\sigma_{yz}^{(2)}$ и $\sigma_{zz}^{(2)}$. В первую очередь отметим следующее:

$$\left.\begin{aligned} &\iint \sigma_{xz}^{(2)}\, d\xi\, d\eta = 0, \\ &\iint \sigma_{yz}^{(2)}\, d\xi\, d\eta = E\,(J_\xi - J_\eta). \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Кроме того, следует удовлетворить условию

$$\iint (\eta \sigma_{xz}^{(2)} - \xi \sigma_{yz}^{(2)})\, d\xi\, d\eta + \iint (\eta \bar{\sigma}_{xz} - \xi \bar{\sigma}_{yz})\, d\xi\, d\eta = 0. \tag{80}$$

Заметим, что в частном случае сечения, имеющего центр симметрии,

$$\iint (\eta \bar{\sigma}_{xz} - \xi \bar{\sigma}_{yz})\, d\xi\, d\eta = 0.$$

Мы удовлетворим упомянутым условиям в свободном сечении, а также уравнениям равновесия, условиям совместности и граничным условиям, если положим

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{(2)} = m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \eta\right) + \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi}, \\ &\sigma_{yz}^{(2)} = m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \xi\right) + \nu \cdot \frac{J_\xi - J_\eta}{J_\xi}\, \xi^2 + \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta}, \\ &\sigma_{zz}^{(2)} = -\eta \zeta\, (J_\xi - J_\eta)\, \frac{E}{J_\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

где ψ_0 — функция изгиба, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 \psi_0 + (1+\nu)\, \frac{E}{J_\xi}\, (J_\xi - J_\eta) = 0 \tag{82}$$

и контурному условию

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial n} = -\nu\, \frac{E}{J_\xi}\, (J_\xi - J_\eta)\, \xi^2 \cos(\widetilde{n, \eta}). \tag{83}$$

Функция φ есть функция кручения константы и определяется равенством (80), требующим равенства нулю крутящего момента в сечении $z=0$.

Перейдем к определению перемещений; положим

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \beta\theta \bar{u} + \beta\theta u^{(2)}, \\ v &= v_0 + \beta\theta \bar{v} + \beta\theta v^{(2)}, \\ w &= w_0 + \beta\theta \bar{w} + \beta\theta w^{(2)}. \end{aligned}$$

Здесь u_0, v_0, w_0 — перемещения, соответствующие деформациям призматического стержня; $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ — перемещения, обусловленные системой напряжений $\bar{\sigma}_{xz}$ и $\bar{\sigma}_{yz}$; $u^{(2)}$, $v^{(2)}$ и $w^{(2)}$ обусловливаются напряжениями $\sigma_{xz}^{(2)}$, $\sigma_{yz}^{(2)}$ и $\sigma_{zz}^{(2)}$. Перемещения u_0, v_0 и w_0 хорошо известны:

$$\left.\begin{aligned} &u_0 = \frac{\beta}{2}\, [z^2 + \nu\,(x^2 - y^2)], \\ &v_0 = \beta \nu x y, \\ &w_0 = -\beta x z. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Займемся определением $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{w}$ как функций от ξ, η, ζ. Учтем, что

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0,$$

так как

$$\bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{zz} = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\bar{w} = \bar{w}(\xi, \eta).$$

Далее

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - E\xi\eta\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\mu}\psi - \bar{w}\right) - \frac{E}{\mu}\xi\eta.$$

Учитывая, что $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = 0$,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{\mu}\psi - \bar{w}\right) = \frac{E}{\mu}\eta. \tag{85}$$

Аналогичным способом получаем:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{E}{2}\xi^2\right),$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\mu}\psi - \bar{w}\right) - \frac{E}{2\mu}\xi^2,$$

или учитывая, что $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0$,

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{1}{\mu}\psi - \bar{w}\right) = 0. \tag{86}$$

Так как $\bar{\sigma}_{xy} = 0$, то

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta}\left(\frac{1}{\mu}\psi - \bar{w}\right) = \frac{E}{\mu}\xi. \tag{87}$$

Из равенств (85) — (87) заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\psi - \bar{w} &= \frac{E}{2\mu}\xi^2\eta, \\ \bar{w} &= \frac{1}{\mu}\psi + \frac{E}{2\mu}\xi^2\eta. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Тогда

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{2E}{\mu}\xi\eta,$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{E}{\mu}\xi^2$$

и наконец

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{2E}{\mu}\xi\eta\zeta, \\ \bar{v} &= -\frac{E}{\mu}\xi^2\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Разумеется, к этому могут быть добавлены произвольные перемещения, соответствующие движению твердого тела.

Заметим здесь, что найденные перемещения не вызывают изгибов оси стержня, так как при $\xi=0$ и $\eta=0$ $\bar{u}=\bar{w}=0$, и, следовательно, перемещения определяют лишь некоторое искажение поперечных сечений.

Перемещения $u^{(2)}$, $v^{(2)}$ и $w^{(2)}$ в свою очередь слагаются из перемещений, соответствующих перемещениям от изгиба некоторой силой, приложенной в центре тяжести сечения, и некоторого дополнительного поворота сечений, характеризуемых константой m. Заметим, что в случае симметричного сечения $m=0$ и дополнительный поворот сечений отсутствует.

Из перемещений от изгиба, имеющих обычный вид, выделяем перемещение оси стержня, т. е. значения $u^{(2)}$, $v^{(2)}$ и $w^{(2)}$ при $y=x=0$:

$$\left.\begin{aligned} u^{(2)} &= 0, \\ v^{(2)} &= \frac{J_\xi - J_\eta}{J_\eta}\left(\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}zl + \frac{1}{3}l^3\right), \\ w^{(2)} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad x=y=0. \tag{90}$$

Собирая все выражения для перемещений и полагая в них $x=y=0$, находим форму деформированной оси стержня, или, иными словами, форму упругой линии:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\beta}{2}(z-l)^2, \\ y &= -\beta\theta\frac{J_\xi - J_\eta}{J_\eta}\left(\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}zl^2 + \frac{1}{3}l^3\right), \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

или, подставляя вместо β его значение $-\frac{\mu}{EJ_\eta}$, находим

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{M}{EJ_\eta}\frac{(z-l)^2}{2}, \\ y &= M\theta\left(\frac{1}{J_\eta} - \frac{1}{J_\xi}\right)\left(\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}zl^2 + \frac{1}{3}l^3\right). \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Определим кривизну упругой линии:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dz^2} &= -\frac{M}{EJ_\eta}, \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= \frac{M}{E}\theta z\left(\frac{1}{J_\eta} - \frac{1}{J_\xi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

$\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right.$ и $\frac{d^2y}{dz^2}$ можно рассматривать как компоненты кривизны$\Big)$.

Сравним наш результат с результатами, вытекающими из теории Кирхгофа, причем воспользуемся формулами, выведенными С. А. Тумаркиным (5). В наших обозначениях эти формулы примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dz^2} &= -\frac{M}{E}\left(\frac{\cos^2\theta z}{J_\eta} + \frac{\sin^2\theta z}{J_\xi}\right), \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= \frac{M}{E}\left(\frac{1}{J_\eta} - \frac{1}{J_\xi}\right)\sin\theta z\cos\theta z. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Очевидно, что с принятой нами точностью $\cos\theta z=1$, $\sin\theta z=\theta z$, $\sin^2\theta z=0$, и формулы С. А. Тумаркина совпадают с нашими. Заметим, что формулы, вытекающие из теории Кирхгофа, выведены с помощью

дополнительных гипотез о зависимостях между компонентами кривизны и изгибающими моментами, тогда как наш вывод не содержит подобного рода допущений.

Полученные результаты естественно обобщаются на случай, когда изгибающий момент имеет слагающие, действующие как в направлении оси x, так и в направлении оси y. Обозначим последнюю компоненту через M' и $\frac{M'}{EJ_\xi}$ через β'. Легко получить выражения для напряжений и перемещений в этом более общем случае, суммируя уже полученные результаты с аналогичными выражениями, в которых меняются ролями оси x и y и, соответственно, ξ и η, и, как уже сказано, M заменяется на M'.

Приводим только формулы для кривизны упругой линии:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dz^2} &= -\frac{M}{EJ_\eta} + \left(\frac{1}{J_\xi} - \frac{1}{J_\eta}\right)\theta z \cdot \frac{M'}{E}, \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= \left(\frac{1}{J_\eta} - \frac{1}{J_\xi}\right)\theta z \cdot \frac{M}{E} + \frac{1}{J_\xi} \cdot \frac{M'}{E}. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Мы рассмотрели здесь задачу об изгибе стержня парами, действующими на его конце. Ценой некоторого усложнения выкладок можно рассмотреть изгиб стержня силой, действующей на конце, причем метод решения задачи остается совершенно тем же; подробного рассмотрения мы здесь не приводим.

§ 8. Деформации естественно закрученного сужающегося стержня

Мы рассмотрели основные деформации такого стержня, который геометрическим поворотом поперечных сечений вокруг оси стержня может быть обращен в призматический. Перейдем к рассмотрению более общего случая — естественно закрученного сужающегося стержня. Мы используем при этом метод Панова [6], примененный им к решению задачи о кручении сужающегося стержня, и рассмотрим основные виды деформаций, т. е. растяжение и изгиб естественно закрученных и сужающихся стержней.

В работе Панова рассматривался стержень, боковая поверхность которого определялась уравнением

$$f[x(1+kz), y(1+kz)] = 0 \tag{96}$$

или

$$f(\xi, \eta) = 0,$$

если ввести вспомогательные переменные

$$\xi = x(1+kz), \quad \eta = y(1+kz).$$

Мы рассмотрим стержень, боковая поверхность которого определяется следующим более сложным уравнением:

$$f\{(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(1+kz); (x\sin\alpha + y\cos\alpha)(1+\gamma kz)\} = 0. \tag{97}$$

В предыдущих параграфах мы пользовались переменными

$$\xi = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$\eta = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$
$$\zeta = z.$$

Теперь введем новые переменные:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi} &= \xi(1+kz),\\ \bar{\eta} &= \eta(1+\gamma kz),\\ \bar{\zeta} &= \zeta = z\end{aligned}\right\} \tag{98}$$

(вводимый нами коэффициент γ позволит выбрать разные законы изменения для взаимно перпендикулярных линейных элементов поперечного сечения).

Тогда уравнение боковой поверхности стержня примет вид $f(\xi, \eta) = 0$. Мы полагаем $\alpha = \theta z$; параметры θ и k будем считать малыми и во всех вычислениях будем сохранять только члены первого порядка малости относительно k и θ.

Нам понадобятся следующие дифференциальные соотношения между основными координатами x, y, z и вспомогательными $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, выведенные с указанной точностью:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} + \theta\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}} + k\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}},\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}} - \theta\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} + \gamma k\bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}},\\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} + \theta\left(\bar{\xi}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}} - \bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\right) + k\left(\bar{\xi}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} + \gamma\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{99}$$

В дальнейшем, там где не возникает опасности смешения, мы будем опускать черточки над $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ и писать кратко ξ, η, ζ.

а) Растяжение осевыми силами, действующими на конце стержня. Зададимся следующими напряжениями:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{zz} &= p + p\theta\sigma_{zz}^{(1)} + pk\sigma_{zz}^{(2)},\\ \sigma_{xx} &= p\theta\sigma_{xx}^{(1)} + pk\sigma_{xx}^{(2)},\\ \sigma_{yy} &= p\theta\sigma_{yy}^{(1)} + pk\cdot\sigma_{yy}^{(2)},\\ \sigma_{xy} &= p\theta\sigma_{xy}^{(1)} + pk\sigma_{xy}^{(2)},\\ \sigma_{xz} &= p\theta\sigma_{xz}^{(1)} + pk\sigma_{xz}^{(2)},\\ \sigma_{yz} &= p\theta\sigma_{yz}^{(1)} + pk\sigma_{yz}^{(2)}.\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Здесь $p = \frac{P}{S}$; $\sigma_{zz}^{(1)}, \ldots, \sigma_{zz}^{(2)}$ — искомые напряжения. Ввиду независимости параметров θ и k уравнения равновесия, условия на боковой поверхности и условия совместности распадаются на две группы: уравнения для $\sigma_{zz}^{(1)}$ и пр. и уравнения для $\sigma_{zz}^{(2)}$ и пр.

Задача определения первой группы дополнительных напряжений полностью совпадает с задачей, решенной нами в § 3; уравнения (9) — (10) и формулы (11) — (16) сохраняют свою силу, только ξ, η, ζ должны быть заменены на $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$. Для второй группы дополнительных напряжений мы получаем следующую задачу: уравнения равновесия

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{xx}^{(2)}}{\partial\bar{\xi}}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(2)}}{\partial\bar{\eta}}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(2)}}{\partial\bar{\zeta}}=0,\\ \frac{\partial\sigma_{xy}^{(2)}}{\partial\bar{\xi}}+\frac{\partial\sigma_{yy}^{(2)}}{\partial\bar{\eta}}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(2)}}{\partial\bar{\zeta}}=0,\\ \frac{\partial\sigma_{xz}^{(2)}}{\partial\bar{\xi}}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(2)}}{\partial\bar{\eta}}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(2)}}{\partial\bar{\zeta}}=0; \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

условия на боковой поверхности

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx}^{(2)}\cdot f'_{\bar{\xi}}+\sigma_{xy}^{(2)}\cdot f'_{\bar{\eta}}=0,\\ &\sigma_{xy}^{(2)}\cdot f'_{\bar{\xi}}+\sigma_{yy}^{(2)}\cdot f'_{\bar{\eta}}=0,\\ &\sigma_{xz}^{(2)}\cdot f'_{\bar{\xi}}+\sigma_{yz}^{(2)}\cdot f'_{\bar{\eta}}+(\bar{\xi}f'_{\bar{\xi}}+\gamma\bar{\eta}f'_{\bar{\eta}})=0. \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

Всем этим условиям, так же как и условиям совместности, можно удовлетворить, положив

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)}&=-\bar{\xi},\\ \sigma_{yz}^{(2)}&=-\gamma\bar{\eta},\\ \sigma_{zz}^{(2)}&=(1+\gamma)\,\bar{\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Если местные оси координат являются главными осями сечения, то найденные дополнительные напряжения не дают ни крутящих, ни изгибающих моментов и сохраняется равенство

$$\iint\sigma_{zz}\,dx\,dy=P.$$

Последнее станет ясно, если мы заметим, что

$$\frac{D\,(x,\,y)}{D\,(\bar{\xi},\,\bar{\eta})}=1-(1+\gamma)\,k\bar{\zeta}.$$

Найденным напряжениям соответствуют следующие дополнительные перемещения:

$$\left.\begin{aligned} u^{(2)}&=-\nu\,(1+\gamma)\,\frac{pk}{E}\,xz,\\ v^{(2)}&=-\nu\,(1+\gamma)\,\frac{pk}{E}\,yz,\\ w^{(2)}&=\frac{pk}{2E}\,(1+\gamma)\left[\,z^2+\nu\,(x^2+y^2)\,\right]-\frac{pk}{2\mu}\,(x^2+\gamma y^2). \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Окончательные выражения для напряжений и перемещений получим, суммируя соответствующие величины с индексом 2 и величины, определяемые формулами (13) — (17) § 3.

В обычном расчете на растяжение сужающихся стержней, проводимом методами сопротивления материалов, не учитываются напряжения $\sigma_{xz}^{(2)}$ и $\sigma_{yz}^{(2)}$. Очевидно однако, что эти дополнительные члены после умножения на pk дадут весьма малую величину, так что обычный расчет

является в этом пункте вполне достаточным для практических целей. Мы уже указывали, что дополнительные напряжения, возникающие от естественной закрученности и, разумеется, не учитываемые методами сопротивления материалов, могут достигать весьма больших значений, если сечение стержня достаточно тонко.

Ниже приводим окончательные формулы для напряжений и перемещений:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0,\\ &\sigma_{zz}=p\,[1+k\,(1+\gamma)\,\zeta],\\ &\sigma_{xz}=p\theta\left\{\frac{J_p}{T}\,\varphi'_\xi-\eta\left(\frac{J_p}{T}-1\right)\right\}-pk\xi,\\ &\sigma_{yz}=p\theta\left\{\frac{J_p}{T}\,\varphi'_\eta+\xi\left(\frac{J_p}{T}-1\right)\right\}-pk\gamma\eta, \end{aligned}\right\} \qquad (105)$$

$$\left.\begin{aligned} &u=-\frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{J_p}{T}-1\right)yz-\frac{\nu p}{E}\,x-\frac{\nu p}{E}\,k\,(1+\gamma)\,xz,\\ &v=\frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{J_p}{T}-1\right)xz-\frac{\nu p}{E}\,y-\frac{\nu p}{E}\,k\,(1+\gamma)\,yz,\\ &w=\frac{p\theta}{\mu}\,\frac{J_p}{T}\,\varphi(\xi,\eta)+\frac{p}{E}\,z+\frac{pk}{2\mu}\,[-x^2+\gamma y^2]+\frac{pk}{2E}\Big[\,z^2+\nu(x^2+y^2)\,\Big]. \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

b) Изгиб сужающегося стержня парами, действующими на конце. Зададимся напряжениями:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{zz}=-\beta Ex+\beta\theta\sigma^{(1)}_{zz}+\beta k\sigma^{(2)}_{zz},\\ &\sigma_{xx}=\beta\theta\sigma^{(1)}_{xx}+\beta k\sigma^{(2)}_{xx},\\ &\sigma_{yy}=\beta\theta\sigma^{(1)}_{yy}+\beta k\sigma^{(2)}_{yy},\\ &\sigma_{xz}=\beta\theta\sigma^{(1)}_{xz}+\beta k\sigma^{(2)}_{xz},\\ &\sigma_{yz}=\beta\theta\sigma^{(1)}_{yz}+\beta k\sigma^{(2)}_{yz},\\ &\sigma_{xy}=\beta\theta\sigma^{(1)}_{xy}+\beta k\sigma^{(2)}_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

причем напряжения $\sigma^{(1)}_{zz}$ и пр. такие же, как найденные нами в § 7, и нам предстоит определить только напряжения $\sigma^{(2)}_{zz}$ и пр. Для них получаем: уравнения равновесия

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma^{(2)}_{xx}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{(2)}_{xy}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma^{(2)}_{xz}}{\partial\zeta}=0,\\ &\frac{\partial\sigma^{(2)}_{xy}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{(2)}_{yy}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma^{(2)}_{yz}}{\partial\zeta}=0,\\ &\frac{\partial\sigma^{(2)}_{xz}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^{(2)}_{yz}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma^{(2)}_{zz}}{\partial\zeta}=0, \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

и граничные условия на боковой поверхности

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^{(2)}_{xx}f'_\xi+\sigma^{(2)}_{xy}f'_\eta=0,\\ &\sigma^{(2)}_{xy}f'_\xi+\sigma^{(2)}_{yy}f'_\eta=0,\\ &\sigma^{(2)}_{xz}f'_\xi+\sigma^{(2)}_{yz}f'_\eta-\xi E\,(\xi f'_\xi+\gamma\eta f'_\eta)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Условия на торцевой поверхности выражают эквивалентность напряжений изгибающей паре с моментом M, вызывающей изгиб в плоскости xOy, которая на свободном сечении совпадает с плоскостью $\xi O\zeta$.

Мы получили для определения напряжений $\sigma_{xx}^{(2)}$ и пр. задачу с поверхностными силами. Пусть

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} &= \bar{\sigma}_{xz} + \bar{\bar{\sigma}}_{xz}, \\ \sigma_{yz}^{(2)} &= \bar{\sigma}_{yz} + \bar{\bar{\sigma}}_{yz}, \\ \sigma_{zz}^{(2)} &= \bar{\sigma}_{zz} + \bar{\bar{\sigma}}_{zz}, \\ \sigma_{xx}^{(2)} &= \sigma_{yy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Выберем $\bar{\sigma}_{xz}$, $\bar{\sigma}_{yz}$ и $\bar{\sigma}_{zz}$ так, чтобы удовлетворить уравнениям равновесия, условиям совместности и условиям на боковой поверхности, не заботясь о том, удовлетворяются ли при этом условия на торце.

Напряжениями $\bar{\bar{\sigma}}_{xz}$, $\bar{\bar{\sigma}}_{yz}$ и $\bar{\bar{\sigma}}_{zz}$ мы удовлетворим торцевые условия, причем получим для их определения некоторую задачу теории упругости без массовых и поверхностных сил.

Положим

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz} &= E\xi^2 + \frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\xi}, \\ \bar{\sigma}_{yz} &= E\gamma\xi\eta + \frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\eta}, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= C\xi\eta; \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

C оставим пока неопределенным. Из уравнений равновесия получим

$$\nabla^2\psi + (2E + \gamma E) = 0. \tag{112}$$

Условия совместности дают

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\psi + \left(2E + \frac{C}{1+\nu}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial\eta}\nabla^2\psi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Эти условия совместимы с уравнением (112), если

$$C = E\gamma(1+\nu). \tag{114}$$

Граничные условия дают

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \psi'_{\xi} f'_{\xi} + \psi'_{\eta} f'_{\eta} = 0. \tag{115}$$

Итак, учитывая значение C, мы видим, что функции ψ определяются уравнением

$$\nabla^2\psi + (2E + E\gamma)\xi = 0 \tag{116}$$

и контурным условием

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \tag{117}$$

Задача определения $\psi(\xi, \eta)$ близка к задаче определения функции изгиба и легко решается для всех тех контуров, для которых может быть решена обычная задача изгиба; так, например, для эллипса

$$\psi = -E\left(1+\frac{\gamma}{2\nu}\right)\left\{\xi\eta^2 - \frac{c^2(2a^2+b^2)}{3a^2+b^2}\xi + \frac{1}{3}\frac{2a^2+b^2}{3a^2+b^2}(\xi^3 - 3\xi\eta^2)\right\},$$

и, стало быть, для таких контуров до конца определяются напряжения $\bar{\sigma}_{xz}$ и $\bar{\sigma}_{yz}$.

Для того чтобы найти напряжение $\bar{\bar{\sigma}}_{xz}$ и пр., вычислим сперва

$$\iint \bar{\sigma}_{xz}\, d\xi\, d\eta \quad \text{и} \quad \iint \bar{\sigma}_{yz}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\iint \bar{\sigma}_{xz}\, d\xi\, d\eta = EJ_\eta + \iint \psi'_\xi\, d\xi\, d\eta = EJ_\eta + \iint \psi'_\xi\, d\xi\, d\eta =$$
$$= EJ_\eta + \iint \left\{\psi'_\xi + \xi\left[\psi''_{\xi\xi} + \psi''_{\eta\eta} + \left(2E + \frac{C}{1+\nu}\right)\right]\right\} d\xi\, d\eta =$$
$$= \left(3E + \frac{C}{1+\nu}\right)J_\eta + \iint \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi\psi'_\xi) + \frac{\partial}{\partial\eta}(\eta\psi'_\eta)\right\} d\xi\, d\eta =$$
$$= \left(3E + \frac{C}{1+\nu}\right)J_\eta + \oint \xi(\psi'_\xi f'_\xi + \psi'_\eta f'_\eta)\, ds = \left(3E + \frac{C}{1+\nu}\right)J_\eta.$$

Аналогичным способом можно показать, что

$$\iint \bar{\sigma}_{yz}\, d\xi\, d\eta = 0,$$

если только ξ и η — главные оси изгиба.

Отсюда видно, что напряжения системы $\bar{\bar{\sigma}}_{xz}$, $\bar{\bar{\sigma}}_{yz}$, $\bar{\bar{\sigma}}_{zz}$ в сечении $z=0$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\iint \bar{\bar{\sigma}}_{xz}\, d\xi\, d\eta = -\left(3E + \frac{C}{1+\nu}\right)J_\eta, \\ &\iint \bar{\bar{\sigma}}_{yz}\, d\xi\, d\eta = 0, \\ &\iint (\xi\sigma^{(2)}_{yz} - \eta\sigma^{(2)}_{xz})\, d\xi\, d\eta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Мы положим, что

$$\left.\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{xz} &= m\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} - \eta\right) + \frac{\partial\psi_0}{\partial\xi}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{yz} &= m\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta} + \xi\right) + \frac{\partial\psi_0}{\partial\eta}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{zz} &= -\left(3 + \frac{C}{1+\nu}\right)\xi\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

где ψ_0 — функция изгиба для контура $f(\xi, \eta) = 0$, φ_0 — функция кручения для того же контура и m — константа, определяемая последним равенством (118).

Перейдем к определению перемещений, поступая аналогично тому, как мы это делали в § 7. Теми же методами найдем, что

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \beta\theta u_1 + \beta k\bar{u} + \beta k\bar{\bar{u}},\\
v &= v_0 + \beta\theta v_1 + \beta k\bar{v} + \beta k\bar{\bar{v}},\\
w &= w_0 + \beta\theta w_1 + \beta k\bar{w} + \beta k\bar{\bar{w}},\\
u_0 &= \frac{\beta}{2}[z^2 + \nu(x^2+y^2)],\\
v_0 &= \beta\nu xy,\\
w_0 &= -\beta xz,\\
\bar{u} &= -\frac{C}{E}y\frac{z^2}{2} - \frac{E\gamma}{\mu}y^2z - \frac{C\nu}{E}\frac{x^2}{2}y,\\
\bar{v} &= -\frac{C}{E}x\frac{z^2}{2} - \frac{C\nu}{E}x\frac{y^2}{2},\\
\bar{w} &= \frac{C}{E}xyz + \frac{2E}{\mu}\frac{x^3}{6} + \frac{E\gamma}{2\mu}xy^2 + \frac{1}{\mu}\psi,\\
\bar{\bar{u}} &= -(3+\gamma)\left[z\nu(x^2-y^2) + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}zl^2 + \frac{1}{3}l^3\right],\\
\bar{\bar{v}} &= -(3+\gamma)\nu xy,\\
\bar{\bar{w}} &= (3+\gamma)\left[x\left(2lz - \frac{3}{2}lz - \frac{z^2}{2}\right) + xy^2\right]
\end{aligned}$$

(u_1, v_1 и w_1 те же, что и в § 3).

К этому должны быть добавлены некоторые перемещения u_3, v_3 и w_3, выражающие поворот сечений и зависящие от m (для симметричного контура они обращаются в нуль). Выпишем, наконец, окончательные результаты для кривизны упругой линии:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dz^2} &= \frac{M}{EJ_\eta} - \frac{M}{EJ_\eta}(3+\gamma)zk,\\
\frac{d^2y}{dz^2} &= \frac{M}{E}\theta z\left(\frac{1}{J_\eta} - \frac{1}{J_\xi}\right).
\end{aligned}$$

Поступило
19. V. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Wood R. M. and Perring G. A., Stresses and strains in airscrews with particular references to twist, Report and Memoranda № 1274, 1929.

[2] Ляв А., Математическая теория упругости, ОНТИ 1935, стр. 398—415.

[3] Риз П. М., Вторичные эффекты при кручении круглого цилиндра, Труды ЦАГИ, вып. 408, 1939; ДАН, т. XX, вып. 4, 1938.

[4] Панов Д. Ю., Вторичные эффекты при кручении эллиптического цилиндра, ДАН, т. XXII, вып. 5, 1939.

[5] Тумаркин С. А., Равновесие и колебания закрученных стержней, Труды ЦАГИ, вып. 341, 1937.

[6] Панов Д. Ю., Кручение стержней, близких к призматическим, ДАН, т. XX, вып. 4, 1938.

P. RIZ. ON THE DEFORMATIONS AND STRESSES OF NATURALLY TWISTED BARS

SUMMARY

In the present paper we consider the deformations of naturally twisted bars, i. e. such bars, the cross-sections of which are turned with respect to each other in the unstressed state.We suppose that the angle of rotation of the cross-sections referred to the unit of length is so small that the higher powers of it may be neglected.

Along with the fundamental coordinates we introduce local coordinates, in which the equation of the lateral surfase of the bar takes the form of an equation of the lateral surface of a prismatical bar.

We assume that the displacements (in the fundamental system of coordinates) are composed of the corresponding displacements in the prismatical bar and some additional displacements considered as functions of the local coordinates (in some cases a similar assumption is made already with respect to the stresses).

For the additional displacements and stresses we form the equations of the theory of elasticity, which we then solve retaining only the first powers of the parameter (the angle of rotation of the cross-sections per unit of length).

By the described method we solve problems on the extension of the bar by forces applied in one cross-section as well as by mass forces of constant intensity, establish the fact of untwisting of the bar at its extension and, finally, consider some cases of a non-uniform initial twist.

We also solve the torsion problem and establish the independence of the torsion stiffness from the natural twist. The axial compression accompanying the torsion of a naturally twisted bar is pointed out.

Further, we solve the problem of pure flexure and prove the validity of the known relations between the curvature components and the components of the flexing moment, which are a generalisation of Bernoulli's hypothesis.

We then consider the deformations of twisted bars the cross-sections of which decrease towards the end. In this part of the paper we use the method of D. Panoff, exposed in his paper (6). In connection with this we solve the problems on the extension and flexure of shrinking bars.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая — Série mathématique

В. К. ИВАНОВ

О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ ИТЕРАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье рассматриваются методы простой итерации и итерации Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений. В результате устанавливается связь между обоими методами в отношении условий их сходимости.

1. При наличии определенных условий систему линейных алгебраических уравнений

$$x_i = L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

можно решить посредством простой итерации, полагая

$$x_i^{(\nu)} = L_i(x_1^{(\nu-1)}, x_2^{(\nu-1)}, \ldots, x_n^{(\nu-1)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

и получая корни x_i из равенства

$$x_i = \lim_{\nu\to\infty} x_i^{(\nu)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

В некоторых случаях решение достигается путем итерации по методу Зейделя, согласно которому $x_i^{(\nu)}$ определяется из уравнений

$$x_i^{(\nu)} = L_i(x_1^{(\nu)}, \ldots, x_{i-1}^{(\nu)}, x_i^{(\nu-1)}, \ldots, x_n^{(\nu-1)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

В IV выпуске «Успехов математических наук» Д. Ю. Пановым была предложена задача: «исследовать связь между обоими методами в отношении условий их сходимости». Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

2. В развернутом виде система (1) запишется следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = u_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2 = u_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = u_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Рассматривая числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ как составляющие n-мерных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$, мы сможем записать систему (5) в символической форме:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{x}, \tag{5a}$$

где A — матрица, составленная из чисел a_{ik}.

3. Равенства (2) и (3) запишутся в векторной форме следующим образом:

$$\boldsymbol{x}^{(\nu)} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{x}^{(\nu-1)}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{x} = \lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{x}^{(\nu)}; \tag{7}$$

ν-ое приближение можно представить в таком виде:

$$\boldsymbol{x}^{(\nu)} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u} + \ldots + A^{\nu-1}\boldsymbol{u} + A^{\nu}\boldsymbol{x}^{(0)} = (1 + A \ldots + A^{\nu-1})\boldsymbol{u} + A^{\nu}\boldsymbol{x}^{(0)}. \tag{8}$$

Предел (7) существует в том и только в том случае, если сходится матричный ряд

$$1 + A + A^2 + \ldots$$

Применяя к этому ряду основной признак сходимости рядов от матриц *, получим следующий результат:

ТЕОРЕМА I. *Для сходимости процесса простой итерации уравнения* (5а) *необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа* λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *матрицы* A *были по модулю меньше единицы:*

$$|\lambda_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

4. В процессе Зейделя ν-ое приближение определяется формулой:

$$x_i^{(\nu)} = u_i + a_{i1}x_1^{(\nu)} + \ldots + a_{i,i-1}x_{i-1}^{(\nu)} + a_{ii}x_i^{(\nu-1)} + \ldots + a_{in}x_n^{(\nu-1)} \tag{10}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Будем считать ν фиксированным числом и введем вспомогательные векторы $\boldsymbol{y}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(n)}$, определив их следующим образом:

$$y_i^{(\mu)} = \begin{cases} x_i^{(\nu)} & \text{при } i \leqslant \mu \\ x_i^{(\nu-1)} & \text{при } i > \mu \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из формул (10) и (11) следует, что имеют место следующие соотношения:

$$y_i^{(\mu)} = \begin{cases} y_i^{(\mu-1)} & \text{при } i \neq \mu \\ u_\mu + a_{\mu1}y_1^{(\mu-1)} + a_{\mu2}y_2^{(\mu-1)} + \ldots + a_{\mu n}y_n^{(\mu-1)} & \text{при } i = \mu. \end{cases} \tag{12}$$

Введем следующие обозначения: $\boldsymbol{u}^{(\mu)}$ — вектор, μ-ая составляющая которого равна u_μ, а остальные — нули; $A^{(\mu)}$ — матрица, μ-ая строка которой совпадает с μ-ой строкой матрицы A, а остальные строки — с соответствующими строками единичной матрицы

$$A^{(\mu)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots 1 & 0 & \ldots 0 \\ a_{\mu1} & a_{\mu2} & \ldots a_{\mu,\mu-1} & a_{\mu\mu} & \ldots a_{\mu n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 1 \end{matrix} \right\| \tag{13}$$

Пользуясь введенными обозначениями, равенства (12) можно записать в векторной форме:

$$\boldsymbol{y}^{(\mu)} = \boldsymbol{u}^{(\mu)} + A^{(\mu)}\boldsymbol{y}^{(\mu-1)} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

* См. И. А. Лаппо-Данилевский, Теория функций от матриц, 1934, стр. 30.

Выражая последовательно $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ через $y^{(0)}$, найдем:

$$y^{(n)} = u^{(n)} + A^{(n)} u^{(n-1)} + A^{(n)} A^{(n-1)} u^{(n-2)} + \ldots + A^{(n)} A^{(n-1)} \ldots A^{(2)} u^{(1)} + \\ + A^{(n)} A^{(n-1)} \ldots A^{(1)} y^{(0)}. \quad (15)$$

Введя обозначения

$$v = u_1^{(n)} + A^{(n)} u^{(n-1)} + \ldots + A^{(n)} A^{(n-1)} \ldots A^{(2)} u^{(1)}, \quad (16)$$

$$B = A^{(n)} A^{(n-1)} \ldots A^{(1)} \quad (17)$$

и замечая, что согласно (11)

$$y^{(0)} = x^{(\nu-1)} \quad \text{и} \quad y^{(n)} = x^{(\nu)},$$

получим

$$x^{(\nu)} = v + Bx^{(\nu-1)}. \quad (18)$$

Результат можно сформулировать в виде теоремы:

ТЕОРЕМА II. *Процесс Зейделя для уравнения* (5a) *эквивалентен простой итерации для уравнения* (18).

5. Положим

$$B^{(\mu)} = A^{(\mu)} A^{(\mu-1)} \ldots A^{(1)} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \quad (19)$$

Очевидно

$$B^{(\mu)} = A^{(\mu)} B^{(\mu-1)}; \quad B^{(n)} = B; \quad B^{(1)} = A^{(1)}.$$

Как видно из (13), при умножении на $A^{(\mu)}$ у $B^{(\mu-1)}$ меняются только элементы μ-ой строки, элементы же остальных строк остаются без изменения. Это даст зависимость между элементами матриц $B^{(\mu)}$ и $B^{(\mu-1)}$:

$$b_{ik}^{(\mu)} = \begin{cases} b_{ik}^{(\mu-1)} & \text{при} \quad k \neq \mu, \\ a_{\mu 1} b_{1k}^{(\mu-1)} + a_{\mu 2} b_{2k}^{(\mu-1)} + \ldots + a_{\mu n} b_{nk}^{(\mu-1)} & \text{при} \quad k = \mu. \end{cases} \quad (20)$$

В частности, для $\mu = 1$

$$b_{ik}^{(1)} = a_{ik}^{(1)} = \begin{cases} a_{ik}, & i = 1, \\ \delta_{ik}, & i > 1, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq k, \\ 1 & \text{при} \quad i = k. \end{cases}$$

Из этих равенств находим, что матрица $B^{(\mu)}$ имеет следующий вид:

$$B^{(\mu)} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1\mu} & b_{1,\mu+1} & \ldots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\mu 1} & b_{\mu 2} & \ldots & b_{\mu\mu} & b_{\mu,\mu+1} & \ldots & b_{\mu,n-1} & b_{\mu n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad (22)$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

где b_{ik} $(i=1, 2, \ldots, n, k=1, 2, \ldots, n)$ — элементы матрицы B. Формулы (13), (21) и (22) дают возможность составить выражения для последовательного вычисления элементов матрицы B:

$$b_{1k}=a_{1k} \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

$$b_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}\sum_{\alpha=1}^{k-1} a_{i\alpha}b_{\alpha k} & i<k \\ \sum_{\alpha=1}^{k-1} a_{i\alpha}b_{\alpha k}+a_{ik} & i \geqslant k\end{array}\right\} \quad (i=2, 3, \ldots, n) \tag{23}$$

6. Из теорем I и II следует

ТЕОРЕМА III. *Для сходимости процесса Зейделя для уравнения* (5а) *необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа матрицы* B, *элементы которой определяются формулами* (23), *были по модулю меньше единицы.*

Если применить обычный критерий сходимости простой итерации, менее общий, но практически более удобный, то получается

ТЕОРЕМА IIIа. *Для сходимости процесса Зейделя уравнения* (5а) *достаточно, чтобы элементы матрицы* B, *определяемые соотношениями* (23), *удовлетворяли неравенствам*

$$|b_{i1}|+|b_{i2}|+\ldots+|b_{in}|<1 \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

7. Взаимоотношение между процессами итераций простой и Зейделя зависит, как показывают теоремы I и III, от распределения корней характеристических уравнений матриц A и B. На отдельных примерах мы покажем, что сходимость одного из них не всегда влечет за собой сходимость другого.

Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=u_1+a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ x_2=u_2+a_{21}x_1+a_{22}x_2.\end{array}\right\} \tag{25}$$

Будем предполагать все входящие сюда числа вещественными. Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0; \tag{26}$$

характеристическое уравнение матрицы B

$$\mu^2-(a_{11}+a_{22}-a_{12}a_{21})\mu+a_{11}a_{22}=0. \tag{27}$$

Элементарными рассуждениями можно показать, что оба корня квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0 \tag{28}$$

тогда и только тогда лежат внутри единичного круга плоскости комплексного переменного, если удовлетворяются неравенства

$$q<1; \quad -p-q<1; \quad p-q<1. \tag{29}$$

Обозначая

$$a_{11}+a_{22}=-p; \quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=q; \quad a_{11}a_{22}=r, \tag{30}$$

мы сможем записать характеристическое уравнение матрицы A в виде (28), а условия сходимости простой итерации в виде (29). Отсюда же

получаем для итерации Зейделя характеристическое уравнение матрицы B

$$\mu^2 + (p + q - r)\mu + r = 0 \tag{31}$$

и условия сходимости процесса Зейделя [из условий (29), (30) и (31)]

$$r < 1; \quad -p - q < 1; \quad p + q - 2r < 1. \tag{32}$$

Рассматривая p, q и r как прямоугольные координаты точки в пространстве, мы будем иметь две области: область сходимости простой итерации, определяемую неравенствами (30) (вертикально стоящая трехгранная призма), и область сходимости итерации Зейделя, определяемую неравенствами (32) (горизонтальная трехгранная призма). В каждой из этих областей имеются точки, не принадлежащие другой, поэтому сходимость одного процесса не всегда влечет за собой сходимость другого.

В качестве примера можно указать уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_1 - 3.61x_2, \\ x_2 &= x_1 + 1.8\ x_2. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Здесь $p = 0.2$; $q = 0.01$, $r = -3.6$. Условия (30) удовлетворяются, а (32) не удовлетворяются, поэтому простая итерация сходится, а итерация Зейделя расходится. Несколько последовательных приближений дано в таблице:

Простая итерация		Итерация Зейделя	
x_1	x_2	x_1	x_2
1	0	1	0
—1	1	—1	—1
—0.61	0.8	6.61	4.81
—0.668	0.83	—3.144	5.514

Истинные значения неизвестных:

$$x_1 = -0.6611\ldots; \quad x_2 = 0.8264\ldots$$

8. Обычно в уравнениях (1)

$$x_i = L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

коэффициенты при x_i в i-ом уравнении в правой части равны нулю. Поэтому при исследовании уравнений с тремя неизвестными мы ограничимся только этим случаем.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2 &= u_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 \quad (a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0) \\ x_3 &= u_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} p &= -a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13}, \\ q &= a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}, \\ r &= a_{12}a_{23}a_{31}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Опуская вычисления, напишем характеристические уравнения матрицы A (простая итерация):

$$x^3+px+q=0, \tag{36}$$

и матрицы B (процесс Зейделя)

$$x^3+(p-q+r)\,x^2-rx=0. \tag{37}$$

Уравнение (37) получается после вычисления элементов матрицы B по формулам (23). При помощи простых рассуждений можно показать, что корни уравнения (36) тогда и только тогда по модулю меньше единицы, если p и q удовлетворяют неравенствам

$$-p-q<1;\quad -p+q<1;\quad p+q^2<1. \tag{38}$$

Уравнение (37) имеет одним из корней нуль. Для оценки двух других корней можно применить неравенства (29), которые приводят к следующим соотношениям:

$$-p+q<1;\quad p-q+2r<1;\quad r<1. \tag{39}$$

Неравенства (38) дают условия сходимости простой итерации, неравенства (39) — условия сходимости процесса Зейделя. И здесь сходимость одного процесса не всегда совпадает со сходимостью другого.

В качестве примера рассмотрим следующий:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1 + x_2 + 0.02x_3 \\ x_2 &= 10x_1 + x_3 \\ x_3 &= 2x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

Здесь

$$p=-0.04;\quad q=0,\quad r=2.$$

Легко проверить, что (38) удовлетворяются, а (39) нет, поэтому простая итерация сходится, а итерация Зейделя расходится. Несколько приближений дано в таблице:

Простая итерация			Итерация Зейделя		
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
0.1	0	0	0.1	0	0
0.1	1.0	0.2	0.1	1	— 9.8
1.104	1.2	— 9.8	0.904	—0.76	9.408
1.104	1.24	— 9.792	—0.472	4.688	— 47.82
1.144	1.248	—10.192	3.832	—9.5	102.6

9. Мы видели, что решение вопроса о сходимости процессов итерации для линейных алгебраических уравнений сводится к исследованию распределения в плоскости комплексного переменного характеристических чисел соответствующих матриц. При переходе к нелинейным алгебраическим и функциональным уравнениям мы, очевидно, не имеем права обобщать на них теорему I, поэтому вопрос о необхо-

димых и достаточных признаках сходимости простой итерации для этих уравнений может быть разрешен только после построения для них аналога теоремы I. Но теорема II, очевидно, легко обобщается на эти классы уравнений в следующей формулировке:

ТЕОРЕМА IV. *Процесс Зейделя для системы уравнений (алгебраических, функциональных)*

$$x_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

эквивалентен процессу простой итерации для системы

$$x_i = \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{41}$$

где функции

$$x_i^{(n)} = \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

получаются путем n-кратного преобразования переменных:

$$x_i^{(\nu)} = \begin{cases} x_i^{(\nu-1)} & \nu \neq i \\ F_i(x_1^{(\nu-1)}, x_2^{(\nu-1)}, \ldots, x_n^{(\nu-1)}) & \nu = i \end{cases} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \tag{43}$$

причем

$$x_i^{(0)} = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Поступило
19.III.1939.

V. IVANOV. ON THE CONVERGENCE OF THE PROCESS OF ITERATION IN THE SOLUTION OF A SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

SUMMARY

The present paper deals with the question of the solution of systems of linear algebraic equations, by the methods of simple and Seidel's iteration. Results concerning convergence criteria for both these methods are deduced. It is proved that the convergence of one of these methods does not necessarily imply the convergence of the other. The paper contains two examples of systems of equations soluble by the method of simple iteration and not soluble by the method of Seidel's iteration.

———

Редактор **В. А. Толстиков** Технический редактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 20/VI 1939 г. Подписано к печати 27/VIII 1939 г.
Формат 70×108 в 1/16. 7 1/4 печ. л. 45 000 зн. в печ. л. АНИ № 1793
Уполномоченный Главлита А-17519 Тираж 2 650 экз. Заказ 1277

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9.